CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ

“ADOLF HAIMOVICI”

Filiera vocațională – Profilul uman – specializarea pedagogie

Etapa locală, 16 februarie 2019

Clasa a XI-a

Subiectul I (7 puncte)

Pe mulțimea $\mathbb{R}$ definim legea de compoziție $x * y = 2xy + x + y$

a) Determinați numărul $a \in \mathbb{R}$, a. î. $x * a = a * x = a, \forall x \in \mathbb{R}$;

b) Determinați mulțimea elementelor simetrizabile ale legii de mai sus.

Barem

a) $x * y = 2xy + x + y = 2yx + y + x = y * x$ **(1p)**

$x * a = a$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2ax + a + x = a \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$. **(2p)**

b) căutăm $e \in \mathbb{R}$, a. î. $x * e = e * x = x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 2\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(e + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = x$ de unde $e = 0$ **(2p)**

apoi determinăm elementele x' cu proprietatea $x * x' = x' * x = e$,

$\Leftrightarrow 2\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x' + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x' = \frac{1}{4x+2} - \frac{1}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ **(2p)**

Subiectul II (7 puncte)

Pe mulțimea $G = (-4, \infty)$ definim legea $x * y = xy + 4x + 4y + 12$

a) **(3p)** Arătați că $x * y \in G$;

b) **(4p)** Arătați că legea de compoziție definită mai sus este asociativă.

Barem

a) $x * y = xy + 4x + 4y + 12 = (x + 4)(y + 4) - 4$, de unde $x * y > -4$ **(3p)**

b) asociativitatea **(4p)**

Subiectul III (7 puncte)

Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea $x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$

a) Să se arate că $\left(2\sqrt{3} + 2\sqrt{5}\right) * \left(\frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}\right) \in \mathbb{N}$;

b) Să se arate că $(x * y)\sqrt{2} \geq |x + y|$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

Barem

a) $\left(2\sqrt{3} + 2\sqrt{5}\right)*\left(\frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}\right) = \left(2\sqrt{3} + 2\sqrt{5}\right)*\left(2\sqrt{5}\text{-}2\sqrt{3}\right)$**(1p)**

$= \sqrt{\left(2\sqrt{3} + 2\sqrt{5}\right)^2 + \left(2\sqrt{5}\text{-}2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{24 + 40} = 8 \in \mathrm{N}$ **(2p)**

b)$(x * y)\sqrt{2} \geq |x + y| \Leftrightarrow \sqrt{2(x^2 + y^2)} \geq |x + y| \geq 0$ **(2p)**

prin ridicare la pătrat avem

$2x^2 + 2y^2 \geq (x + y)^2$și finalizarea $(x - y)^2 \geq 0\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}$**(2p)**

Subiectul IV (7 puncte)

Pe mulțimea G=(0,∞) definim legea de compoziție $x * y = x^{\log_3 y}$

a) Să se arate că $x * y = 3^{(\log_3 x)\cdot(\log_3 y)}$;

b) Să se determine simetricul elementului $x = 3^n, n \in \mathbb{N}\ n \geq 2$.

Barem

a)$x * y = x^{\log_3 y} \Leftrightarrow x^{\log_3 y} = 3^{(\log_3 x)\cdot(\log_3 y)}$

$\Leftrightarrow (\log_3 x) \cdot (\log_3 y) = (\log_3 x) \cdot (\log_3 y)$**(3p)**

b)Determinarea elementului neutru $e = 3$ **(2p)**

Determinarea simetricului $x' = 3^{\frac{1}{n}},\ n \geq 2$ **(2p)**

Notă: *Orice altă rezolvare corectă va fi punctată conform baremului.*