CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ “ADOLF HAIMOVICI”

Profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

Profilul real specializarea științele naturii

Profilul tehnic

Faza locală, 25 februarie 2017
Clasa a XII-a

Subiectul 1 (7 puncte)
Se dă matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G=\{X(m) | X(m)=I_2+mA, m \in \mathbf{R}\}$.

a) Calculați A^2.
b) Arătați că $X(m)\cdot X(n)=X(m+n)$ pentru orice numere reale m și n.
c) Arătați că orice matrice din G este inversabilă și că inversa ei este tot o matrice din G.
d) Verificați dacă ecuația $\left(X(m)\right)^2=O_2$ are soluții.

Barem

a) $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O_2$ **(1p)**
b) $X(m)\cdot X(n)=(I_2+mA)(I_2+nA)=I_2+mA+nA=X(m+n)$ **(2p)**
c) $det\left(X(m)\right)=\begin{vmatrix} 1+2m & 4m \\ -m & 1-2m \end{vmatrix}=1\neq 0$ rezultă că matricea este inversabilă.
$\left(X(m)\right)^{-1}=X(-m)\in G$ **(2p)**
d) Presupunem că ecuația are soluții
$\det\left(\left(X(m)\right)^2\right)=det(O_2)$ *de unde* $1\cdot 1=0$ ceea ce este absurd **(2p)**

În concluzie ecuația nu are soluții.

Subiectul 2 (7 puncte)

Pe R se definește legea de compoziție $x*y=xy+ax+by+c,\ a,b,c\in\mathbf{R}$

a) Determinați parametrii reali *a*,*b*,*c* astfel încât legea dată să fie comutativă , asociativă și $x*2017=2017$ pentru orice $x\in\mathbf{R}$.
b) Pentru *a*,*b*,*c* determinate la punctul anterior rezolvați în **R** ecuația $x*x*x=x$.

Barem

a) Din condiția de comutativitate rezultă $a=b$ **(1p)**
Din condiția de asociativitate rezultă $c=a^2-a$ **(1p)**
Din condiția $x*2017=2017$ rezultă $a=-2017$ **(1p)**
Finalizare $a=-2017, b=-2017, c=2017^2+2017$ **(1p)**

b) $x*x=(x-2017)^2+2017,\ x*x*x=(x-2017)^3+2017$ **(2p)**
Rezolvă ecuația și obține $x_1=2017, x_2=2018,\ x_3=2016$ **(1p)**

Subiectul 3 (7 puncte)

Se consideră integralele $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{3\sin x + 4\cos x} dx$ *și* $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{3\sin x + 4\cos x} dx$.

a) Calculați $(3\sin x + 4\cos x)'$.

b) Arătați că $3I + 4J = \frac{\pi}{2}$ *și* $3J - 4I = \ln\frac{3}{4}$.

c) Determinați I și J.

Barem

$a)$ $(3\sin x + 4\cos x)' = 3\cos x - 4\sin x$ **(1p)**

$b)$ $3I + 4J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2}$ **(2p)**

$3J - 4I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(3\sin x + 4\cos x)'}{3\sin x + 4\cos x} dx = \ln\frac{3}{4}$ **(2p)**

c)Rezolvă sistemul de la punctul anterior și obține

$I = \frac{1}{25}\left(\frac{3\pi}{2} - 4\ln\frac{3}{4}\right)$ **(2p)** și $J = \frac{1}{25}\left(2\pi + 3\ln\frac{3}{4}\right)$ **(2p)**

Subiectul 4 (7 puncte)

Fie funcția $f: R \to R, f(x) = 6x - 2$.

a) Determinați mulțimea primitivelor lui f care nu au rădăcini reale.

b) Determinați funcția g: $R \to R$ astfel încât $g''(x) = f(x), g(1) = 0$ și $g(-1) = 4$.

Barem

a) $F(x) = 3x^2 - 2x + c$ **(1p)**

Condiție $\Delta < 0 => 4 - 12c < 0 => c \in \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$ **(2p)**

$b)$ $g(x)' = 3x^2 - 2x + c$ **(1p)**

$g(x) = x^3 - x^2 + cx + d$ **(1p)**

Obținem $c = -3$ **(1p)** și d=3. **(1p)**