CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

Profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

Profilul real specializarea științele naturii

Profilul tehnic

Faza locală, 25 februarie 2017
Clasa a XI-a

Subiectul 1 (7 puncte)

Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculaţi A^n $, n \in N^*$

b)Determinaţi matricea $B = A^1 + A^2 + A^3 + \cdots + A^n$.

Barem

a) Calculul lui $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 2^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^2 & 0 & 2^2 \end{pmatrix}$ **(2p)**

Demonstrarea prin inducţie că $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$ **(3p)**

b) Calculul lui $B = \begin{pmatrix} 2^n - 1 & 0 & 2^n - 1 \\ 0 & n & 0 \\ 2^n - 1 & 0 & 2^n - 1 \end{pmatrix}$ **(2p)**

Subiectul 2 (7 puncte)

Centrul unui paralelogram ABCD este punctul I(2,3),iar laturile AB si BC au ecuaţiile: AB: x+6y-9=0 si BC: 3x-4y-5=0 . Găsiți coordonatele vârfurilor paralelogramului.

Barem

Găsirea B(3,1) si D(1.5) **(2p)**

AD –paralela prin D la BC, CD- paralela prin D la BC si găsirea ecuaţiilor: AD: 3x-4y+17=0 respectiv CD:x+6y-31=0 **(3p)**

Găsirea A(-3,2) și C(7,4). **(2p)**

Subiectul 3 (7 puncte)

a) Calculați limitele:

$$\lim_{x\to 2017} \frac{x-2017}{\sqrt{x-2016}-1} \quad și \quad \lim_{x\to 2017} \frac{x-2017}{\sqrt[3]{x-2016}-1}$$

b) Arătați că:

$$\lim_{x\to 2017} \frac{\sqrt{x-2016}+\sqrt[3]{x-2016}-2}{x-2017} = \frac{5}{6}$$

Barem

$a)$ $\lim_{x\to 2017} \frac{x-2017}{\sqrt{x-2016}-1} = 2$ **(2p)** $\lim_{x\to 2017} \frac{x-2017}{\sqrt[3]{x-2016}-1} = 3$ **(2p).**

$$b) \lim_{x\to 2017} \frac{\sqrt{x-2016}+\sqrt[3]{x-2016}-2}{x-2017} = = \lim_{x\to 2017}\left(\frac{\sqrt{x-2016}-1}{x-2017}+\frac{\sqrt[3]{x-2016}-1}{x-2017}\right) =$$

$= \frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$. **(3p)**

Subiectul 4 (7 puncte)

Fie funcția $f: R-\{-1\} \to R, f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{|x+1|}, a, b. c \in R$

a) Determinați numerele a,b,c astfel încât dreapta de ecuație $y = x + 2017$ să fie asimptotă la graficul funcției spre $+\infty$ și $f(1) = 1$.

b) Pentru a,b,c determinate la punctul anterior aflați ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcției.

Barem

a) Explicitează modulul și funcția **(1p)**

$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a \implies a = 1$ **(1p)**

$n = \lim_{x\to\infty}[f(x) - mx] = b - 1 \implies b = 2018$ **(1p)**

$f(1) = 1 \implies c = -2017$ **(1p)**

$b)$ $m' = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$ **(1p)**

$n' = \lim_{x\to-\infty}[f(x) - m'x] = -2017$ (**1p**) de unde ecuația asimptotei $y = -x - 2017$. **(1p)**