CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

Profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

Profilul real specializarea științele naturii

Profilul tehnic

Faza locală, 25 februarie 2017
Clasa a X-a

Subiectul 1 (7 puncte)

Să se determine m∈**R**, astfel încât funcţia f : **R**→**R** $f(x)=\begin{cases}2x+m, & x\le 1\\ 4mx-1, & x\succ 1\end{cases}$, să fie bijectivă

Barem

f strict crescătoare ⇒ m>0 **(2p)**

f= injectivă ⇒ 2+m≤4m-1 ⇒ m≥1 **(2p)**

f= surjectivă ⇒2+m≥4m-1 ⇒ m≤1 **(2p)**

f =bijectivă ⇔ m=1 **(1p)**

Subiectul 2 (7 puncte)

Calculați $S=\sum_{k=1}^{2017}\left[\lg k\right]$, unde $\left[x\right]$ este partea întreagă a lui x .

Barem

$S=\sum_{k=1}^{9}\left[\lg k\right]+\sum_{k=10}^{99}\left[\lg k\right]+\sum_{k=100}^{999}\left[\lg k\right]+\sum_{k=1000}^{2017}\left[\lg k\right]=$ **(3p)**

S=$9\cdot 0+90\cdot 1+900\cdot 2+1018\cdot 3=4944$ **(4p)**

Subiectul 3 (7 puncte)

Ordonaţi crescător numerele x, y. z, ştiind că :

$$x=\lg\left(1-\frac{1}{2}\right)+\lg\left(1-\frac{1}{3}\right)+\lg\left(1-\frac{1}{4}\right)+...\lg\left(1-\frac{1}{100}\right)$$

$$y=\lg\left(tg10^0\right)\lg\left(tg11^0\right)\lg\left(tg12^0\right)...\lg\left(tg80^0\right)$$

$$z=\left(1+i\right)^7+\left(1-i\right)^7$$

Barem

Obţinerea lui x=-2 **(2p),** y=0 **(2p),** z=16**(2p).**

Ordonarea numerelor **(1p).**

Subiectul 4 (7 puncte)

Se dă numărul complex $z=\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{1-i\sqrt{3}}\right)^6$.

a) Arătaţi că $|z|=1$.

b) Calculaţi suma $S=1+z+z^2+\cdots+z^{999}$ şi produsul $P=1\cdot z\cdot z^2\cdot\cdots\cdot z^{999}$.

Barem

$a)\ |z|=\left(\left|\frac{\sqrt{2+2}}{\sqrt{1+3}}\right|\right)^6=1$ **(2p)**

$b)\ z=\left(\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{1-i\sqrt{3}}\right)^3\right)^2=\left(\frac{2\sqrt{2}(1+3i-3-i)}{1-3i\sqrt{3}-9+3i\sqrt{3}}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}(1-i)}{2}\right)^2=\frac{2(1-2i-1)}{4}=-i$ **(3p)**

$S=1+(-i)+(-i)^2+\cdots+(-i)^{999}=0$ **(1p)**

$P=1\cdot(-i)\cdot(-i)^2\cdot\cdots\cdot(-i)^{999}=(-i)^{500\cdot 999}=1$ **(1p)**