CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ “ADOLF HAIMOVICI”

Profilul uman

Faza locală, 25 februarie 2017
Clasa a XII-a

Subiectul 1 (7 puncte)

Să se determine matricea A = $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix}$ și matricea B=$\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dacă are loc relația:

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & -9 & -2 \end{pmatrix}.$$

Barem

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} a & ax & ay \\ b & bx+c & by+cz \\ d & dx+e & dy+ez+f \end{pmatrix}$$ **(3p)**

Din egalitate obținem a=1, b=-1, c=2, d=3, e = 0, f=-2, x= -3, y= 0, z=1 **(3p)**

Finalizare **(1p).**

Subiectul 2 (7 puncte)

Fie $\Delta = \begin{vmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a \\ a^2 & a^2+2a & 2a+1 \\ a & 2a+1 & a+2 \end{vmatrix}$, unde $a \in \mathbb{R}$. Să se determine valorile lui a pentru care Δ=0.

Barem

$$\Delta = a^2\begin{vmatrix} a & 3a & 3 \\ a & a+2 & 2a+1 \\ 1 & 2a+1 & a+2 \end{vmatrix} = a^2\begin{vmatrix} 1 & 3a & 3 \\ 1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & 2a^2+a & a^2+2a \end{vmatrix} = a^2\begin{vmatrix} 1 & 3a & 3 \\ 0 & -2a+2 & 2a-2 \\ 0 & 2a^2-2a & a^2+2a-3 \end{vmatrix}$$ **(4p)**

$$\Delta = a^2\begin{vmatrix} 1 & 3a & 3 \\ 0 & -2a+2 & 2a-2 \\ 0 & 2a^2-2a & a^2+2a-3 \end{vmatrix} = 6a^2(a-1)^2(a+1)$$ **(2p)**

Concluzia $a = 0, a = 1$ *și* $a = -1$ **(1p).**

Subiectul 3 (7 puncte)

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ în $M_2(\mathbb{R})$.

a) Să se demonstreze că $(A + I_2)^{-1} = (A - I_2)$;

b) Să se arate că ecuația $X^2 = A$ nu are soluții în $M_2(\mathbb{R})$.

Barem

a) $det(I_2 + A) \neq 0$ (**1p**)

$(A + I_2)(A + I_2)^{-1} = I_2 \Leftrightarrow (A + I_2)(A - I_2) = I_2 \Leftrightarrow 2I_2 - I_2 = I_2$, deoarece $A^2 = 2I_2$ **(2p).**

b) $X^2 = A \Longrightarrow \det(X^2) = \det(A)$, dar $\det(X^2) = (\det(X))^2 \geq 0$, **(2p)**

iar $\det(A) = -2 < 0$, contradicție. Nu avem soluții pentru ecuația $X^2 = A$ **(2p).**

Subiectul 4 (7 puncte)

Se dă A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculați $A+A^2+......+A^{2017}$.

Barem

$A^2=2A$ **(1p)**

Demostrăm prin inducție matematică $A^n = 2^{n-1}A$ **(3p)**

$A+A^2+......+A^{2017}= A(1+2+............+2^{2016}) = (2^{2017}-1)A$ **(3p)** .