CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ “ADOLF HAIMOVICI”

Profilul uman

Faza locală, 25 februarie 2017
Clasa a X-a

Subiectul 1 (7 puncte)

Să se aducă la o formă mai simplă expresia $E(a)=\dfrac{\sqrt{a\cdot\sqrt{a\cdot\sqrt[3]{a}}}}{\sqrt[3]{a\cdot\sqrt[4]{a\cdot\sqrt[3]{a}}}}$ $a>0$.

Barem

$$E(a)=\frac{\sqrt{a\sqrt{a\sqrt[3]{a}}}}{\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}}}=\frac{\left(a\left(a\cdot a^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(a\left(a\cdot a^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}}\ \textbf{(3p)}\qquad E(a)=\frac{a^{\frac{5}{6}}}{a^{\frac{4}{9}}}=a^{\frac{7}{18}}\ \textbf{(4p).}$$

Subiectul 2 (7 puncte)

Să se calculeze $\dfrac{\left(2^{\log_{\frac{1}{2}}3}\right)^2}{4^{3\log_4 2}}$.

Barem

$$\frac{\left(2^{\log_{\frac{1}{2}}3}\right)^2}{4^{3\log_4 2}}=\frac{2^{\log_2\frac{1}{9}}}{4^{\log_4 8}}\ \textbf{(4p)}\qquad \frac{2^{\log_2\frac{1}{9}}}{4^{\log_4 8}}=\frac{\frac{1}{9}}{8}=\frac{1}{72}\ \textbf{(3p).}$$

Subiectul 3 (7 puncte)

Să se determine $x>0$ știind că : $\log_a x=\dfrac{2\log_a b}{5}+\dfrac{3}{4\log_b a}$.

Barem

$$\frac{2\log_a b}{5}+\frac{3}{4\log_b a}=\log_a b^{\frac{2}{5}}+\log_a b^{\frac{3}{4}}\quad \textbf{(3p)}$$

$$\log_a b^{\frac{2}{5}}+\log_a b^{\frac{3}{4}}=\log_a b^{\frac{23}{20}},\ x=b\sqrt[20]{b^3}\ \textbf{(4p).}$$

Subiectul 4 (7 puncte)

Arătați că numărul $a=\log_{\sqrt{3}}\dfrac{9}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{3}{5+2\sqrt{6}}$ este natural.

Barem

$a = \log_{\sqrt{3}} \frac{9}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{5+2\sqrt{6}} = \log_3 \left(\frac{9}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)^2 + \log_3 \left(\frac{3}{5+2\sqrt{6}}\right)^{-1}$ **(4p)**

Apoi, avem $a = \log_3 \frac{81}{5+2\sqrt{6}} \cdot \frac{5+2\sqrt{6}}{3} \Longrightarrow a = 3 \in \mathbb{N}$ **(3p).**