CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ – 11 martie 2023
Secțiunea H1

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

Filiera tehnologică – toate profilurile

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
Clasa a IX –a

Subiectul 1.

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{2m+5}{5-2m}x + 2, m \in \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{2}\right\}$.

a) Determinați cel mai mare număr întreg *m* pentru care funcția *f* este strict crescătoare.

b) Pentru *m=2* determinați funcția $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ care verifică relația

$$(f \circ g)(x) + (g \circ f)(x) = 18x - 6,\ (\forall)\ x \in \mathbb{R}.$$

SOLUȚIE:

a) Pune condiția $\frac{2m+5}{5-2m} > 0$..1p

Obține $m \in \left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$..2p

Găsește *m=2*..1p

b) Determină $(f \circ g)(x) = 9ax + 9b + 2$ și $(g \circ f)(x) = 9ax + 2a + b$..1p

Obține $18ax + 2a + 10b + 2 = 18x - 6$ și determină $a = 1$ și $b = -1$ 2p

Subiectul 2.

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea $5f(x) + 2f(-x) = 2x^3 + 5x$, pentru orice număr real *x*.

a) Determinați funcția *f*.

b) Demonstrați că funcția *f* este o funcție impară.

c) Calculați suma $S = f(-100) + f(-99) + f(-98) + \cdots + f(99) + f(100)$.

SOLUȚIE:

a) Deduce $5f(-x) + 2f(x) = -2x^3 - 5x$..1p

Determină $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{3}x$..2p

b) Verifică relația $f(-x) = -f(x), (\forall) x \in \mathbb{R}$..1p

c) Observă că $f(-n) + f(n) = 0, (\forall)\ n \in \{1,2, \dots ,100\}$..2p

Calculează $S = f(0) = 0$..1p

Subiectul 3.

Se consideră ecuația $(sina + sinb)x^2 - 2(cosa + cosb)x - sina - sinb = 0, unde\ a, b \in (0, \frac{\pi}{2}]$.

a) Demonstrați identitatea $(cosa + cosb)^2 + (sina + sinb)^2 = 4cos^2\frac{a-b}{2}$.

b) Arătați că ecuația are rădăcini reale și distincte pentru orice $a, b \in (0, \frac{\pi}{2}]$.

c) Determinați valoarea sumei $a+b$ știind că $x_1^2 + x_2^2 = 2, unde\ x_1\ și\ x_2$ sunt rădăcinile ecuației.

SOLUȚIE:

a) Obține $(cosa + cosb)^2 + (sina + sinb)^2 = 2 + 2cos(a - b)$..........2p
Aplică formula $1 + cos2x = 2cos^2x$ și finalizează..........1p

b) Calculează $\Delta = 4[(cosa + cosb)^2 + (sina + sinb)^2] = 16cos^2\frac{a-b}{2}$..........1p
Demonstrează $cos\frac{a-b}{2} \neq 0, (\forall)a, b \in (0, \frac{\pi}{2}]$ și deduce că $\Delta > 0$, deci ecuația are rădăcini reale distincte..........1p

c) Scrie relațiile lui Viete și obține $x_1^2 + x_2^2 = \frac{4(cosa+cosb)^2}{(sina+sinb)^2} + 2$..........1p
Obține $2cos\frac{a+b}{2}cos\frac{a-b}{2} = 0, și\ cum\ cos\frac{a-b}{2} \neq 0, (\forall)a, b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow a + b = \pi$..........1p

Subiectul 4.

La începutul unui concurs de orientare turistică participanților li se indică traseul de urmat: din punctul de plecare P se parcurg 500m spre nord, apoi 300m spre est, 900m spre sud și 600m spre vest, ajungând în final la sosire în punctul S.
Se consideră un sistem de coordonate cu originea în P , axa Px pe direcția vest-est (sensul spre est) și axa Py pe direcția sud-nord (sensul spre nord).

a) Trasați, în sistemul ales, traiectoria unui concurent care a străbătut întreg traseul, la scara 1:10 000 și determinați coodonatele punctului de sosire S.

b) Calculați modulul vectorului $\overrightarrow{PS}$ din desenul trasat.

c) Un concurent străbate întreg traseul cu viteza constantă de 5km/h, iar un arbitru parcurge doar distanța $|\overrightarrow{PS}|$ cu viteza constantă de 1,25km/h. Stabiliți care dintre cei doi ajunge primul în punctul S.

SOLUȚIE:

a) Realizează desenul corespunzător traseului:
PA=500m, rezultă pe desen PA=5cm, deci A(0,5)..........1p
Deduce B(3,5), C(3,-4) și S(-3,-4)..........2p

b) Calculează $|\overrightarrow{PS}| = 5$..........1p

c) PA+AB+BC+CS=2,3km și PS=0,5km..........2p
Obține $t_c = \frac{2,3}{5} > t_a = \frac{0,5}{1,25}$ și deduce că arbitrul ajunge primul..........1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ – 11 martie 2023

Secțiunea H1

Filiera tehnologică – toate profilurile

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a X–a

Subiectul 1.

a) Demonstrați că $(\log_3 36)\cdot\left(\log_{\sqrt{6}} 3\right)-(\log_5 8)\cdot\left(\log_{2\sqrt{2}} 5\right)=2$.

b) Demonstrați că $\dfrac{1}{\log_2 6+\log_2{}^2 3}+\dfrac{1}{\log_3 6+\log_3{}^2 2}+\dfrac{1}{1+\log_2 3+\log_3 2}=1$.

SOLUȚIE:

a) $(\log_3 36)\cdot\left(\log_{\sqrt{6}} 3\right)=2\cdot(\log_3 6)\cdot 2\cdot(\log_6 3)=4\cdot\log_3 6\cdot\log_6 3=4$ 1p

$(\log_5 8)\cdot\left(\log_{2\sqrt{2}} 5\right)=2\cdot\log_5 2\sqrt{2}\cdot\log_{2\sqrt{2}} 5=2$ 1p

$(\log_3 36)\cdot\left(\log_{\sqrt{6}} 3\right)-(\log_5 8)\cdot\left(\log_{2\sqrt{2}} 5\right)=4-2=2$ 1p

b) $\dfrac{1}{\log_2 6+\log_2{}^2 3}=\dfrac{1}{1+\log_2 3+\log_2{}^2 3}$ 1p

$\dfrac{1}{\log_3 6+\log_3{}^2 2}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\log_2 3}+\dfrac{1}{\log_2{}^2 3}}=\dfrac{\log_2{}^2 3}{1+\log_2 3+\log_2{}^2 3}$ 1p

$\dfrac{1}{1+\log_2 3+\log_3 2}=\dfrac{1}{1+\log_2 3+\dfrac{1}{\log_2 3}}=\dfrac{\log_2 3}{1+\log_2 3+\log_2{}^2 3}$ 1p

$\dfrac{1}{\log_2 6+\log_2{}^2 3}+\dfrac{1}{\log_3 6+\log_3{}^2 2}+\dfrac{1}{1+\log_2 3+\log_3 2}=\dfrac{1+\log_2{}^2 3+\log_2 3}{1+\log_2+\log_2{}^2 3}=1$ 1p

Subiectul 2.

a) Determinați numărul numerelor pare de 10 cifre distincte, știind că pe pozițiile impare se găsesc cifre impare, iar pe pozițiile pare se găsesc cifrele pare.

b) Determinați numărul natural n, știind că dezvoltarea $\left(\sqrt{3}+\sqrt[6]{2}\right)^n$ conține exact 10 termeni raționali.

SOLUȚIE:

a) Cifrele impare se pot permuta în $5!=120$ moduri, iar cifrele pare se pot permuta tot în $5!=120$ moduri, așadar, din regula produsului, avem 14400 numere....................3p

b) $T_{k+1}=C_n^k\sqrt{3}^{\,n-k}\left(\sqrt[6]{2}\right)^k=C_n^k\cdot 3^{\frac{n-k}{2}}\cdot 2^{\frac{k}{6}}$, deci $\dfrac{k}{6}\in\mathbb{N}$, astfel că $k\in\{0,6,12,...,54\}$ 2p

Cum $k\le n$, avem că $n\in\{54,55,56,57,58,59\}$ 1p

Din $\dfrac{n-k}{2}\in\mathbb{N}$, avem că n este par, prin urmare $n\in\{54,56,58\}$ 1p

Subiectul 3. Se consideră $z=\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$, unde $i^2=-1$.

a) Demonstrați că $z^2-z+1=0$ și că $z^3=-1$.

b) Determinați numerele complexe a, b, c știind că acestea verifică relațiile $a+b+c=1,\ a+z^2b-zc=2,\ a-zb+z^2c=3$.

SOLUȚIE:

a) Pentru $z^2-z+1=0$, se verifică sau se rezolvă ecuația....................1p

Pentru $z^3=-1$, se verifică, sau se inmulțește $z^2-z+1=0$ cu $z+1$ și se obține că $z^3+1=0$, deci $z^3=-1$.........1p

b) Adunând cele 3 relații, obținem că $3a+b\left(z^2-z+1\right)+c\left(z^2-z+1\right)=6$, deci $a=2$....................2p

Din prima relație avem că $b+c=-1$, iar din a doua relație, $b+z^2c=0$....................1p

Obținem $b=\frac{-3+i\sqrt{3}}{6}$, $c=\frac{-3-i\sqrt{3}}{6}$....................2p

Subiectul 4. Un biolog stabilește într-un studiu că o epidemie se răspândește în populația unui sat după legea $f(t)=1-e^{-0.35\cdot t}$, unde $f(t)$ reprezintă procentul din populație care a intrat în contact cu boala, iar *t* reprezintă numărul de săptămâni de la apariția bolii în sat. După cât timp, procentul populației infectate devine 80%?(se poate utiliza $\ln 5\cong 1,6$)

SOLUȚIE:

Din $f(t)=80\%$, obținem că $e^{-0.35t}=\frac{1}{5}$....................3p

Din $e^{0.35t}=5$, obținem că $\frac{7t}{20}=\ln 5$, deci $t=\frac{20\ln 5}{7}$....................3p

$t\cong 4.57$....................1p

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ – 11 martie 2023

Secțiunea H1

Filiera tehnologică – toate profilurile

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a XI–a

Subiectul 1.

În mulțimea $M_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $C=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 2023^n & 7\end{pmatrix}$, unde $n\in\mathbb{N}$.

a) Demonstrați că **nu** există $a,b,c\in\mathbb{R}$ și $n\in\mathbb{N}$ astfel încât $aA+bB+cI_2=C$.

b) Determinați A^{2023}.

c) Demonstrați că $B^n=I_2+\left(2^n-1\right)A,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

SOLUŢIE:

a) Calculează $aA+bB+cI_2=\begin{pmatrix}a+2b+c & a+b\\ 0 & b+c\end{pmatrix}$ **1p**

Precizează că $\begin{pmatrix}a+2b+c & a+b\\ 0 & b+c\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}4 & 5\\ 2023^n & 7\end{pmatrix}$ deoarece $2023^n\neq 0\,,(\forall)\,n\in\mathbb{N}$ **1p**

b) Calculează $A^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=A$, $A^3=A^2\cdot A=A\cdot A=A^2=A$

$\Rightarrow$ inductiv $A^{2023}=A$ **1p**

c) Verifică relaţia pentru $n=1: B^1=I_2+(2^1-1)\cdot A \Leftrightarrow B=I_2+A$ (adevărată) **1p**

Foloseşte metoda inducţiei matematice :

presupune că $B^k=I_2+\left(2^k-1\right)\cdot A$ este adevărată.

Demonstrează că: $B^{k+1}=B^k\cdot B\overset{pp}{=}\left(I_2+\left(2^k-1\right)\cdot A\right)(I_2+A)=$ **1p**

$=I_2+I_2\cdot A+(2^k-1)\cdot A\cdot I_2+(2^k-1)\cdot A^2\Rightarrow$ folosind $I_2\cdot A=A\cdot I_2=A$ și

punctul b) $B^{k+1}=I_2+A+(2^k-1)\cdot A+(2^k-1)\cdot A=$ **1p**

$=I_2+\left[1+\left(2^k-1\right)+\left(2^k-1\right)\right]\cdot A=I_2+\left(2\cdot 2^k-1\right)\cdot A=I_2+\left(2^{k+1}-1\right)\cdot A$ **1p**

deci , conform principiului inducţiei matematice, relaţia este adevărată, $(\forall)n\in\mathbb{N}^*$.

Subiectul 2.

Se consideră mulțimea de matrice $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z} \right\}$.

a) Arătați că dacă $A, B \in G$, atunci $A + B \in G$ și $A \cdot B \in G$.

b) Demonstrați că orice matrice nenulă din G este inversabilă.

c) Demonstrați că dacă $A, B \in G$ și $A \cdot B = O_2$, atunci $A = O_2$ sau $B = O_2$.

SOLUȚIE:

a) Dacă $A, B \in G \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ cu $a, b \in \mathbb{Z}$ și $B = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$ cu $c, d \in \mathbb{Z}$ **1p**

Atunci avem $A + B = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix}$ cu $a+c, b+d \in \mathbb{Z} \Rightarrow A + B \in G$ **1p**

și $A \cdot B = \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -(ad + bc) & ac - bd \end{pmatrix}$ cu $ac - bd, ad + bc \in \mathbb{Z} \Rightarrow A \cdot B \in G$ **1p**

b) $A \in G \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ cu $a, b \in \mathbb{Z}$ și $detA = a^2 + b^2$ **1p**

Dacă $A \neq O_2 \Rightarrow a$ și b nu sunt simultan 0 deci $a^2 + b^2 \neq 0 \Rightarrow detA \neq 0 \Rightarrow A$ inversabilă **1p**

c) $A \cdot B = O_2 \Leftrightarrow \det(A \cdot B) = detO_2 \Leftrightarrow detA \cdot detB = 0 \Leftrightarrow detA = 0\ sau\ detB = 0$ **1p**

Dacă $detA = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = b = 0\ deci\ A = O_2$

iar dacă $detB = 0 \Rightarrow c^2 + d^2 = 0 \Rightarrow c = d = 0\ deci\ B = O_2$ **1p**

Subiectul 3.

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2^x \cdot x, & x < 1 \\ x^2 + 2x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$.

a) Determinați ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f.

b) Demonstrați că ecuația $f(x) = 0$ admite cel puțin o soluție în intervalul $[-1, 2]$.

c) Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 0$ să fie paralelă cu dreapta de ecuație $y = ax + 2$.

SOLUȚIE:

a) Calculează $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2^x \cdot x = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{2^{-x}} =$ (caz $\frac{-\infty}{\infty}$ aplică l'Hospital)= **1p**

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{(x)'}{(2^{-x})'} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{-2^{-x} \cdot ln2} = \left(\frac{1}{-\infty}\right) = 0 \Rightarrow y = 0$ asimptotă orizontală la $-\infty$ pentru graficul funcției f. **1p**

b) Justifică continuitatea funcției pentru $x < 1$ și $x > 1$ (produs de funcții elementare, respectiv funcție de gradul al II-lea) **1p**

Calculează $l_s(1) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} (2^x \cdot x) = 2$;

$l_d(1) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} (x^2 + 2x - 1) = 2;$ $\quad f(1) - 1^2 + 2 \cdot 1 - 1 - 2$

deci $l_s(1) = l_d(1) = f(1)$ adică funcţia e continuă în $x = 1$. **1p**

Fiind continuă pe $\mathbb{R}$, f are proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$ şi deoarece **1p**

$f(\ \ 1) = 2^{-1} \cdot (\ \ 1) = \frac{-1}{2} < 0$; $f(2) = 2^2 \mid 2 \cdot 2 \quad 1 = 7 > 0$ va rezulta că există cel puţin un număr real $c \in [-1; 2]$ a.î. $f(c) = 0$, adică există cel puţin soluţia $x - c$ pentru ecuația $f(x) = 0$.

c) Pentru $x < 1, f(x) = 2^x \cdot x$, produs de funcţii elementare, deci este derivabilă pe $(-\infty; 1)$ iar $f'(x) = (2^x \cdot x)' = 2^x ln2 \cdot x + 2^x$. **1p**

Tangenta la grafic în punctul de abscisă $x_0 = 0$ va fi paralelă cu dreapta de ecuație $y = ax + 2$ dacă şi numai dacă au pante egale, adică $f'(0) = a \Leftrightarrow 2^0 = a \Leftrightarrow a = 1$. **1p**

Subiectul 4.

La o clasă a XI-a profesorul scrie pe tablă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin x+\cos x+x$. Pentru orice $n\geq 1$, notează cu $f_{n+1}(x)=f_n'(x),\ x\in\mathbb{R}$, iar $f_1(x)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}$. Propune elevilor săi următorul joc: fiecare dintre ei va ieși la tablă în ordine alfabetică și va scrie rezultatul pentru $f_n(0)$, fiecare elev luându-l pe *n* drept numărul său de la catalog.

a) Ce numere vor fi scrise pe tablă?
b) Dacă în clasă sunt 28 de elevi, aflați care sunt ultimele două numere scrise pe tablă și precizați de câte ori este scris fiecare număr.

SOLUȚIE:

a) Elevul cu numărul 1 la catalog scrie pe tablă
$f_1(0)=f(0)=\sin 0+\cos 0+0=0+1+0=1.$
Elevul cu nr.2 la catalog calculează
$f_2(x)=f_1'(x)=(sinx+cosx+x)'=\cos x-\sin x+1$ deci va scrie pe tablă
$f_2(0)=\cos 0-\sin 0+1=1-0+1=2.$
Cel cu nr.3 va calcula $f_3(x)=f_2'(x)=(\cos x-\sin x+1)'=-\sin x-\cos x$ deci va scrie pe tablă $f_3(0)=-\sin 0-\cos 0=0-1=-1.$
Cel cu nr.4 va calcula $f_4(x)=f_3'(x)=(-\sin x-\cos x)'=-\cos x+\sin x$ deci va scrie pe tablă $f_4(0)=-\cos 0+\sin 0=-1+0=-1.$
Cel cu nr.5 va calcula $f_5(x)=f_4'(x)=(-\cos x+\sin x)'=\sin x+\cos x$ deci va scrie pe tablă $f_5(0)=\sin 0+\cos 0=0+1=1.$
Cel cu nr.6 va calcula $f_5(x)=f_4'(x)=(\sin x+\cos x)'=\cos x-\sin x$ deci va scrie pe tablă $f_6(0)=\cos 0-\sin 0=1-0=1.$ **2p**
Cel cu nr.7 va calcula $f_6(x)=f_5'(x)=(\cos x-\sin x)'=-\sin x-\cos x$ deci va scrie pe tablă $f_7(0)=-\sin 0-\cos 0=0-1=-1.$

Se observă că $f_7(x)=f_3(x)$ şi la următoarele derivări vom găsi $f_8(x)=f_4(x)$, $f_9(x)=f_5(x)$, $f_{10}(x)=f_6(x)$, în consecinţa numerele scrise pe tablă începând de la al treilea elev se vor repeta în secvenţe de câte 4 numere (-1; -1; 1;1).
Aşadar numerele scrise pe tablă de elevi vor fi : -1; 1 şi 2. **1p**

b) Obsevăm că numerele scrise în ordinea numerotării din catalog sunt 1 şi 2; urmate de repetarea secvenţei (-1 ; -1; 1; 1) . Astfel că, eliminâd din calcul pe cei 2 elevi de la început ale căror rezultate nu respectă secvenţa menţionată, rămân 26 elevi ale căror rezultate se vor regăsi în 6 secvente complete de câte 4, iar ultimii 2 de la catalog vor scrie primele 2 numere dintr-o secvenţă incompletă de 4 , adică vor scrie -1 şi -1. **2p**
Astfel că 2 apare o dată ; 1 apare o data la început, apoi de câte 2 ori în cele 6 secvenţe care se repetă succesiv, deci de 13 ori, iar -1 apare de câte 2 ori în cele 6 secvente care se repetă şi încă de 2 ori la final, adică de 14 ori. **2p**

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ – 11 martie 2023

Secțiunea H1

Filiera tehnologică – toate profilurile

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE - Clasa a XII–a

Subiectul 1.

Se consideră mulțimea de matrice $A=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -3b & a\end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{Z}\right\}$.

a) Arătați că, dacă $X\in A$ și $Y\in A$, atunci $X+Y\in A$.
b) Demonstrați că, dacă $X\in A$, $Y\in A$ și $XY=O_2$, atunci $X=O_2$ sau $Y=O_2$.
c) Admitem cunoscut faptul că A este inel în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor. Determinați elementele inversabile ale acestui inel.

SOLUȚIE:

a) Fie $X=\begin{pmatrix} a & b \\ -3b & a\end{pmatrix}\in A$, unde $a,b\in\mathbb{Z}$ și $Y=\begin{pmatrix} c & d \\ -3d & c\end{pmatrix}\in A$, cu $c,d\in\mathbb{Z}$.

Se obține $X+Y=\begin{pmatrix} a & b \\ -3b & a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c & d \\ -3d & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -3(b+d) & a+c\end{pmatrix}$ și cum $a+c,\ b+d\in\mathbb{Z}\Rightarrow X+Y\in A$ 2p

b) Fie $X,Y\in A$ astfel încît $XY=O_2$. Atunci una din aceste matrice are determinantul nul (altfel XY ar fi inversabilă).

Fie X această matrice, $X=\begin{pmatrix} a & b \\ -3b & a\end{pmatrix}$. Cum $\det(X)=0\Rightarrow a^2+3b^2=0$, $a,b\in\mathbb{Z}\Rightarrow a=b=0$, deci $X=O_2$ ... 2p

c) Fie $X=\begin{pmatrix} a & b \\ -3b & a\end{pmatrix}\in A$ o matrice inversabilă a inelului A. Atunci există $Y=\begin{pmatrix} c & d \\ -3d & c\end{pmatrix}\in A$ astfel încât $XY=I_2$.

Trecând la determinanți, avem $(\det X)(\det Y)=\det(XY)=\det I_2=1$ 1p

Cum $\det X=a^2+3b^2\in\mathbb{N}$ și $\det Y=c^2+3d^2\in\mathbb{N}$, rezultă că $\det X=a^2+3b^2=1$ 1p

Dacă $b\neq 0$, atunci $a^2+3b^2\geq 3$, deci $\Rightarrow b=0$ de unde se obține $a^2=1\Leftrightarrow a=\pm 1$. Prin urmare singurele matrice inversabile ale inelului A sunt I_2 și $-I_2$. 1p

Subiectul 2.

Pentru a,b din mulțimea $M=[0,\infty)$ se definește operația $a*b=\ln\left(e^a+e^b-1\right)$.

a) Arătați că pentru orice $a,b\in M$, rezultă $a*b\in M$.
b) Demonstrați că legea de compoziție "$*$" este asociativă.
c) Determinați $a\in M$ astfel încât $\underbrace{a*a*a*\ldots*a}_{de\ 2023\ ori\ a}=2a$.

SOLUȚIE:

a) Fie $a,b\in M$, adică $a,b\geq 0$. Atunci, folosind faptul că funcția funcțiile exponențială și logaritmică de bază e sunt strict crescătoare, avem $a*b=\ln\left(e^a+e^b-1\right)\geq\ln\left(e^0+e^0-1\right)=0$. Deci $a*b\in M$ 1p

b) Fie $a,b,c\in M$. Demonstrează că $(a*b)*c=a*(b*c)$ deoarece:

$(a*b)*c=\ln\left(e^a+e^b-1\right)*c=\ln\left(e^{\ln\left(e^a+e^b-1\right)}+e^c-1\right)=\ln\left(e^a+e^b+e^c-2\right)$ 1p

$a*(b*c)=a*\ln\left(e^b+e^c-1\right)=\ln\left(e^a+e^{\ln\left(e^b+e^c-1\right)}-1\right)=\ln\left(e^a+e^b+e^c-2\right)$ 1p

c) Prin inducție se demonstrează că pentru orice $a\in M$ și orice $n\in\mathbb{N}^*$ avem $\underbrace{a*a*a*\ldots*a}_{de\ n\ ori\ a}=\ln\left(ne^a-n+1\right)$..... 1p

Relația din enunț este echivalentă cu $\ln\left(2023e^a-2022\right)=2a\Leftrightarrow 2023e^a-2022=e^{2a}$. Notând $e^a=t$ se obține ecuația de gradul II, $t^2-2023t+2022=0$ cu soluțiile $t_1=1$ și $t_2=2022$ 2p

Se obține $a_1=0$ și $a_2=\ln 2022$ 1p

Subiectul 3.

Se consideră funcțiile $f, F : (-1,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{2x}{(x+1)(x^2+1)}$, $F(x) = a\ln(x+1) + b\ln(x^2+1) + c \cdot arctgx$.

a) Determinați $a,b,c \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția *F* să fie o primitivă a funcției *f*.

b) Calculați $\int_0^1 f(x)dx$.

c) Arătați că orice primitivă a funcției *f* este strict crescătoare pe intervalul $[0,\infty)$.

SOLUȚIE:

a) *F* este primitivă a funcției $f \Rightarrow F$ este derivabilă pe $(-1,\infty)$ și $F'(x) = f(x), \forall x \in (-1,\infty)$.

Se obține $F'(x) = \dfrac{(a+2b)x^2 + (2b+c)x + (a+c)}{(x+1)(x^2+1)}$ 2p

Identificând coeficienții, se obține $a = -1,\ b = \dfrac{1}{2},\ c = 1$ 1p

b) $\int_0^1 f(x)dx = -\ln(x+1)\Big|_0^1 + \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_0^1 + arctgx\Big|_0^1 = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\ln 2$ 2p

c) Dacă *G* este o primitivă oarecare a lui *f* pe $(-1,\infty)$, atunci $G'(x) = f(x) = \dfrac{2x}{(x+1)(x^2+1)} \geq 0, \forall x \in [0,\infty)$, prin urmare *G* este sctrict crescătoare pe $[0,\infty)$. 2p

Subiectul 4.

Consumul de motorină realizat de fiecare mașină a unei firme de curierat, pe durata celor 7 zile dintr-o săptămână, este modelat de o funcție $M : [0,7] \to \mathbb{R}_+$ cu $M(0) = 0$, care este derivabilă și verifică relația $M'(t) = (t^2+1) \cdot e^{4-t}, \forall t \in [0,7]$, iar $M(t)$ reprezintă cantitatea de motorină consumată în intervalul $[0,t]$ exprimată în litri.

a) Demonstrați că $F(x) = -(x^2+2x+3)e^{4-x}$ $, x \in \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x^2+1)e^{4-x}$.

b) Demonstrați că $M(t) = 3e^4 - (t^2+2t+3)e^{4-t},\ \forall t \in [0,7]$.

c) Verificați dacă lunea (prima zi a săptămânii) fiecare mașină din firmă consumă mai puțin de 53 de litri de motorină.

d) Considerând, pe parcursul unei săptămâni, intervalele zilnice $[0,1],\ [1,2],\ [2,3],\ ...,\ [6,7]$, corespunzătoare zilelor de luni, marți, ..., respectiv duminică, determinați în ce zi a săptămânii se realizează cel mai mare consum de motorină.

SOLUȚIE:

a) Justifică *F* este derivabilă și $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ 1p

b) Conform a) $M(t) = -(t^2+2t+3)e^{4-t} + k,\ \forall t \in [0,7], k \in \mathbb{R}$ 1p

și cum $M(0) = 0 \Rightarrow k = 3e^4$, se obține $M(t) = 3e^4 - (t^2+2t+3)e^{4-t},\ \forall t \in [0,7]$ 1p

c) Lunea, fiecare mașină consumă $M(1) = 3e^4 - 6e^3 = 3e^3(e-2) < 3 \cdot 2{,}8^3(2{,}8-2) < 53$ litri 1p

d) Pentru fiecare $n = \overline{1,7}$, notăm $c(n) = M(n) - M(n-1)$ consumul de motorină al unei mașini în ziua *n* a săptămânii. Obținem $c(n) = e^{4-n}((e-1)n^2 - 2n + 2e - 3)$ 1p

Se arată că $c(n) < c(n-1)$ (calcul sau demonstrează că funcția *c* este descrescătoare) 1p

Prin urmare, cel mai mare consum de motorină se înregistrează lunea 1p