MINISTERUL EDUCAȚIEI

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA JUDEȚEANĂ - 11 martie 2023

Secțiunea H2

Filiera Teoretică: profilul Real - Științe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a IX-a

Subiectul 1.

a) Fie mulțimile $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \,/\, \frac{|x^2-16|}{|5x-8|-13} \leq 0\right\}$ și $B = \left\{x \in \mathbb{Z} \,/\, \sqrt{\frac{5-x}{36}} \in \mathbb{Q}\right\}$.

Aflați elementele mulțimii $A \cap B$.

b) Rezolvați ecuația $9x^2 + y^2 = 12x + 7y$ pentru x, y numere întregi.

SOLUȚIE:

a) $A = \{-4, 0, 1, 2, 3, 4\}$ **2p**

$\sqrt{5-x} \in \mathbb{Q} \Rightarrow 5 - x$ pătrat perfect **1p**

Se verifică pe rând valorile din A și se obține $A \cap B = \{-4, 1, 4\}$ **1p**

b) $(3x-2)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{65}{4} \;/\cdot 4$ **1p**

$(6x-4)^2 + (2y-7)^2 = 65$ **1p**

Cum $x, y \in \mathbb{Z}$, singurele cazuri sunt $6x - 4 = \pm 1, 2y - 7 = \pm 8$; $6x - 4 = \pm 8, 2y - 7 = \pm 1$;
$6x - 4 = \pm 4, 2y - 7 = \pm 7$ sau $6x - 4 = \pm 7, 2y - 7 = \pm 4$

de unde $(x, y) \in \{(0,0), (0,7), (2,4), (2,3)\}$ **1p**

Subiectul 2.

Se consideră șirurile $(a_n)_{n\geq 1}$ și $(b_n)_{n\geq 1}$ definite prin $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{5a_n+3}{a_n+3}$, $b_n = \frac{a_n-3}{a_n+1}$, pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătați că șirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică și aflați formula termenului general al șirului $(b_n)_{n\geq 1}$.

b) Arătați că $a_n \geq 2$ pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$.

SOLUȚIE:

a) $b_{n+1} = \frac{a_{n+1}-3}{a_{n+1}+1} = \frac{\frac{5a_n+3}{a_n+3}-3}{\frac{5a_n+3}{a_n+3}+1} = \frac{2a_n-6}{6a_n+6} = \frac{1}{3} \cdot b_n$, pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$, ... **2p**

deci $(b_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică de rație $\frac{1}{3}$ **1p**

$b_1 = -\frac{1}{3}, b_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$ **1p**

b) Inducție $p(n)$: $a_n \geq 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$, $p(1)$ adevărat **1p**

Presupunem $p(k)$ adevărat și demonstrăm $p(k+1)$ adevărat.

$a_{k+1} = 5 - \frac{12}{a_k+3}$

$a_k + 3 \geq 5 \Rightarrow -\frac{12}{a_k+3} \geq -\frac{12}{5}$ de unde $a_{k+1} \geq \frac{13}{5} > 2$, deci $p(k+1)$ adevărat. Finalizare. **2p**

Subiectul 3.

Două bazine sunt umplute cu apă, fiecare prin câte un robinet diferit. Robinetul primei piscine are pe parcursul primei ore debitul de a litri/oră. Pe parcursul celei de-a doua ore debitul este înjumătățit. Pe parcursul celei de-a treia ore debitul este înjumătățit din nou față de cel anterior și tot așa mai departe, în fiecare oră.

Robinetul celui de-al doilea bazin are pe parcursul primei ore debitul tot de a litri/oră. Pe durata celei de-a doua ore debitul este dublu, pe parcursul cei de-a treia ore debitul este dublu față de cel anterior și tot așa mai departe. Știind că cele două robinete umplu bazinele în același număr de ore, aflați raportul dintre volumele celor două bazine.

SOLUȚIE:

Fie V_1 și V_2 volumele celor două piscine.

După n ore, volumul primei piscine este $V_1 = a + \frac{a}{2} + \frac{a}{2^2} + \frac{a}{2^3} + \cdots + \frac{a}{2^{n-1}} = 2a \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ **3p**

După n ore, volumul celei de a doua piscine este $V_2 = a + 2a + 2^2 a + \cdots + 2^{n-1} a = a(2^n - 1)$ **3p**

$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2^{n-1}}$ **1p**

Subiectul 4.

Fie dreptunghiul $ABCD$ și triunghiul dreptunghic ABE cu $\sphericalangle A = 90^0$. Știind că $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{EN} = 2 \cdot \overrightarrow{NB}$ și $EC \cap AB = \{M\}$, se cere:

a) Să se arate că punctele D, M și N sunt coliniare.

b) Dacă M este ortocentrul triunghiului EDB, P este mijlocul lui DN și Q este mijlocul lui EF, $EC \cap DB = \{F\}$, arătați că $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MQ} = \vec{0}$.

SOLUȚIE:

a) $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ **1p**

$\overrightarrow{DN} = 2\overrightarrow{AE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{EB} = 2\overrightarrow{AE} + \frac{2}{3}\left(-\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB}\right)$ **2p**

$\overrightarrow{DN} = \frac{4}{3} \cdot \overrightarrow{AE} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{4}{3} \cdot \overrightarrow{DM}$, deci D, M și N sunt coliniare **1p**

b) Cum ΔBDE isoscel de bază ED deducem că BA este bisectoarea $\sphericalangle EBD$ și deci $MN = MF$ **1p**

Din **a)** deducem că $\frac{DM}{MN} = 3$ și deci, $PM = MN$ **1p**

ΔBDE isoscel de bază ED rezultă că $DN = EF \Rightarrow PN = QF$ si deci $MQ = MF$, de unde concluzia. ... **1p**

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ - 11 martie 2023

Secțiunea H2

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică: profilul Real - Științe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE - Clasa a X -a

Subiectul 1.

Se consideră șirul $(z_n)_{n\geq 1}\subset\mathbb{C}$, definit astfel: $z_n=(1+i)^n+(1-i)^n$, unde $i^2=-1$.

a) Demonstrați că $z_n\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N}^*$.

b) Calculați suma $S=\sum_{k=1}^{2023}z_k$.

SOLUȚIE:

a) $\overline{z_n}=\overline{(1+i)^n+(1-i)^n}=\left(\overline{1+i}\right)^n+\left(\overline{1-i}\right)^n=(1-i)^n+(1+i)^n$ 2p

$\overline{z_n}=z_n\Rightarrow z_n\in\mathbb{R}$ 1p

b) $S=\sum_{k=1}^{2023}(1+i)^k+\sum_{k=1}^{2023}(1-i)^k=S_1+S_2$ 1p

$S_1=\sum_{k=1}^{2023}(1+i)^k=(1+i)\dfrac{(1+i)^{2023}-1}{1+i-1}=\dfrac{(1+i)^{2024}-1-i}{i}=-2^{1012}\cdot i+i-1$ 1p

$S_2=\sum_{k=1}^{2023}(1-i)^k=(1-i)\dfrac{(1-i)^{2023}-1}{1-i-1}=\dfrac{(1-i)^{2024}-1+i}{i}=2^{1012}\cdot i-i-1$ 1p

$S=S_1+S_2=-2$ 1p

Subiectul 2.

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\left(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}\right)^x+a\cdot\left(\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}\right)^x$, $a\in\mathbb{R}$.

a) Pentru $a=1$ demonstrați că *f* este funcție pară.

b) Pentru $a=-2$ rezolvați ecuația $f(x)=-1$.

SOLUȚIE:

a) Observă că $\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}=1$ 1p

Pentru $a=1\Rightarrow f(x)=\left(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}\right)^x+\left(\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}\right)^x$

$f(-x)=\left(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}\right)^{-x}+\left(\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}\right)^{-x}=\dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}\right)^x}+\dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}\right)^x}=$ 1p

$=\dfrac{\left(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}\right)^x+\left(\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}\right)^x}{\left(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}\right)^x\cdot\left(\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}\right)^x}=\left(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}\right)^x+\left(\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}\right)^x=f(x)\Rightarrow f$ este pară 1p

b) Pentru $a=-2$, ecuația $f(x)=-1$ devine $\left(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}\right)^x-2\cdot\left(\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}\right)^x=-1$ 1p

Substituie $\left(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}\right)^x=t$, $t>0\Rightarrow\left(\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}\right)^x=\dfrac{1}{t}$ 1p

Obține ecuația $t^2+t-2=0$ cu soluția care convine $t=1\Rightarrow x=0$ 2p

Subiectul 3.

Să se demonstreze că $x\log_2\left(2^y+2^z\right)+y\log_2\left(2^z+2^x\right)+z\log_2\left(2^x+2^y\right)\leq 2\left(x^2+y^2+z^2\right)$, pentru orice numere $x,y,z\geq 1$.

SOLUȚIE:

Cum $y\geq 1,\ z\geq 1\Rightarrow \frac{1}{2^y}\leq\frac{1}{2}$ şi $\frac{1}{2^z}\leq\frac{1}{2}$, adunând se obține $\frac{1}{2^y}+\frac{1}{2^z}\leq 1$ 2p

$\frac{2^y+2^z}{2^y\cdot 2^z}\leq 1\Leftrightarrow 2^y+2^z\leq 2^{y+z}$ 1p

$\log_2\left(2^y+2^z\right)\leq y+z$ 1p

Se obține $\sum x\cdot\log_2\left(2^y+2^z\right)\leq\sum x\cdot\left(y+z\right)=2\sum xy$ 1p

Dar, $2\sum xy\leq 2\sum x^2$ 1p

Finalizează $\sum x\cdot\log_2\left(2^y+2^z\right)\leq 2\sum x^2$ 1p

Subiectul 4.

Două puncte mobile *A*, *B* se deplasează în reperul cartezian $\left(xOy\right)$ după traiectoriile $y_A=\log_5\left(7^x-2\right)$ şi respectiv $y_B=\log_7\left(5^x+2\right)$. Să se determine la ce distanță de originea *O* a reperului se întâlnesc cele două puncte mobile.

SOLUȚIE:

Impune condiția de intersecție $y_A=y_B=y$ 1p

Se obține $\begin{cases} y=\log_5\left(7^x-2\right)\\ y=\log_7\left(5^x+2\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7^x-2=5^y\\ 5^x+2=7^y\end{cases}$ 1p

Rezultă $5^x+7^x=5^y+7^y$ 1p

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\Rightarrow\mathbb{R}, f\left(x\right)=5^x+7^x$

Funcția *f* este sumă de funcții strict crescătoare, deci este strict crescătoare $\Rightarrow$ *f* este injectivă $\Rightarrow x=y$ …..…. 1p

Se obține ecuația $7^x=5^x+2\Leftrightarrow\left(\frac{5}{7}\right)^x+2\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^x=1$ cu soluția unică $x=1\Rightarrow y=1$, deci cele 2 puncte se întâlnesc în punctul $M\left(1,1\right)$.. 2p

Distanța $OM=\sqrt{2}$ 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA JUDEȚEANĂ - 11 martie 2023
Secțiunea H2

Filiera Teoretică: profilul Real - Științe ale Naturii
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE - Clasa a XI-a

Subiectul 1. Se considera matricea $A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ și $X(a) = I_2+aA$, $a\in\mathbb{R}$.

a) Arătați că $X(a)X(b) = X(ab + a + b)$, $(\forall)a,b\in\mathbb{R}$ și determinați perechile de numere întregi (a,b) astfel încât $X(a)\,X(b) = I_2$.

b) Aflați numărul real a astfel încât $det(\ X(a)X(-a)\ )\geq 3a+3$.

c) Aflați matricea $X\in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât are loc relația $X\cdot X(1) = A$.

SOLUȚIE:

a) Calculează $X(a)X(b) = (I_2+aA)(I_2+bA) = I_2+(a+b+ab)A = X(a+b+ab)$ ……………………….......1p

Scrie $X(a)X(b) = X(a + b + ab) = X((a+1)(b+1)-1) = X(0)$ deci $(a+1)(b+1) = 1$, $(a,b)\in\{(-2,-2), (0,0)\}$…2p

b) Calculează $det(X(a)\cdot X(-a)) = 1-a^2$ ……………………………………………………….....................1p

Rezolvă inecuația $1-a^2\geq 3a+3 \Rightarrow a\in[-2,-1]$ ………………………………………………...................1p

c) Calculează $X^{-1}(1)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ ....……………………………………………........1p

Află matricea $X = X^{-1}(1)\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ ………………………………………………………….........1p

Subiectul 2.

Fie funcția $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+\ln(x+1)-\ln(x-1)$.

a) Determinați ecuațiile asimptotelor la graficul funcției *f*.

b) Calculați: $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(f(x)-2x\right)$.

c) Arătați că ecuația $f(x+2)=f(x)$ are cel puțin o soluție în intervalul $(1,\infty)$.

SOLUȚIE:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} 2x+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=2+\infty=\infty$, deci $x=1$ este asimptotă verticală…………………………1p

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} 2x+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\infty+\ln 1=\infty$ deci graficul nu are asimptotă orizontală………...……………........1p

Cum $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=2$, $n=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-mx=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\ln 1=0 \Rightarrow$ $y = 2x$ este as oblică spre $+\infty$ …..1p

b) Calculeaza $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(f(x)-2x\right)=\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x=\ln e^2=2$ ………………………………2p

c) Considerăm funcția continuă $g:(1,\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=f(x+2)-f(x)=4+\ln\left(\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}\right)$...............…..1p

Cum $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=4$ și $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} g(x)=-\infty$, există cel puţin o soluţie în intervalul $(1,\infty)$ ……………………...……1p

Subiectul 3.

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că $\left|f\left(x\right)-x\right|\le x^2$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

a) Calculaţi $f(0)$.

b) Demonstraţi că funcţia *f* este continuă în $x_0=0$.

SOLUŢIE:

a) pentru $x = 0$ obţine $\left|f\left(0\right)\right|\le 0$, deci *f*(0) = 0……………………………………………………….…….….3p

b) Din inegalitatea din enunț obținem: $-x^2\le f\left(x\right)-x\le x^2,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$

$-x^2+x\le f\left(x\right)\le x^2+x,\forall x\in\mathbb{R}$ ………………..………………………………….....................................2p

Din criteriul cleștelui avem $\lim\limits_{x\to\infty} f\left(x\right)=0$. Cum *f* (0) = 0 rezultă continuitatea funcției în $x_0=0$ …............2p

Subiectul 4.

Considerăm matricea $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ care apare afișată pe monitorul unui calculator.

a) Printr-un program, la un prim pas, matricea A este înlocuită pe monitorul calculatorului cu pătratul ei. Procesul se repetă şi la pasul doi apare afişat A^3, la pasul următor apare A^4 și se reia procesul de atâtea ori de câte ori a fost comandat de către programator. Aflați câți pași trebuie să comande programatorul pentru ca pe monitor să apară la final o matrice cu suma tuturor elementelor egală cu 1025.

b) Printr-un nou program, la primul pas, elementele unei linii oarecare ale matricei A sunt mărite cu 1 și noua matrice obținută în acest mod înlocuiește matricea A afișată inițial pe monitorul calculatorului. Procesul se repetă în mod automat cu elementele unei linii oarecare, aceeași sau oricare din celelalte două, din noua matrice afișată pe monitor și se reia de atâtea ori de câte ori a fost programat. Aflaţi câţi paşi trebuie să comande programatorul pentru ca pe monitor să apară la final o matrice cu suma tuturor elementelor egală cu 1025.

SOLUŢIE:

a) Calculează A^2, A^3 ………………………………………………………………………………….... 1p

Demonstrează prin inducţie că $A^n=\begin{pmatrix}2^{n-1}&0&2^{n-1}\\0&1&0\\2^{n-1}&0&2^{n-1}\end{pmatrix}$ ……………………………………………….... 2p

și se obține ecuația $2^{n-1}\cdot 4+1=1025$ cu soluția n = 9, deci vor fi 8 paşi . ……………………………….2p

b)La fiecare pas suma elementelor noii matrice crește cu 3 ..…………………………………...................1p

obţinând astfel *5+ 3n = 1025*, deci *n = 340* ……………………………………………………...1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ - 11 martie 2023
Secțiunea H2

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică: profilul Real - Științe ale Naturii
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE - Clasa a XII -a

Subiectul 1.

Pentru $a \in \mathbb{R}$ considerăm mulțimea $G_a = (a, +\infty)$ și legea de compoziție pe G_a definită prin $x * y = xy - ax - ay + a^2 + a$, pentru orice $x, y \in G_a$.

a) Arătați că $(G_a, *)$ este grup abelian.
b) Demonstrați că $f_a: G_a \to \mathbb{R}, f_a(x) = \ln(x - a)$ este izomorfism între grupurile $(G_a, *)$ și $(\mathbb{R}, +)$.
c) Definiți o lege de compoziție „$\circ$” pe $G = (2023, +\infty)$ și o lege de compoziție „Δ” pe $H = (2024, +\infty)$ astfel încât $(G, \circ)$ *și* (H, Δ) să fie grupuri abeliene izomorfe.

SOLUȚIE:

a) $x * y = (x - a)(y - a) + a \in (a, +\infty)$. „ $*$ ” este asociativă, comutativă, are elementul neutru $e = a + 1 \in G_a$ și orice $x \in G_a$ este inversabil și $x' = \frac{ax - a^2 + 1}{x - a} \in G_a$ 3p
b) f este bijectivă și $f(x * y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in G_a$ 2p
c) $G = G_{2023}$, definim $x \circ y = xy - 2023x - 2023y + 2023^2 + 2023$, $H = G_{2024}$, definim $x \Delta y = xy - 2024x - 2024y + 2024^2 + 2024$, ... 1p
$f_{2023}: G \to \mathbb{R}$ este izomorfism între $(G, \circ)$ și $(\mathbb{R}, +)$, iar $f_{2024}^{-1}: \mathbb{R} \to H$, izomorfism între $(\mathbb{R}, +)$ și (H, Δ), deci $f_{2024}^{-1} \circ f_{2023}: G \to H$ este izomorfism între $(G, \circ)$ și (H, Δ) 1p

Obs.
Cum $f_{2023}(x) = \ln(x - 2023)$, $f_{2024}(x) = \ln(x - 2024)$, găsim $f_{2024}^{-1}(x) = e^x + 2024$ și

$$f_{2024}^{-1} \circ f_{2023}(x) = x + 1$$

Subiectul 2.

Pe mulțimea $G = (1, +\infty)$ definim legea de compoziție asociativă $x \circ y = \sqrt[3]{x^{\log_2 y}}$ pentru orice $x, y \in G$.
Arătați că:

a) $x \circ y = 2^{\frac{1}{3}\log_2 x \cdot \log_2 y}$, pentru orice $x, y \in G$;
b) pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, există $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in G, x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n$ astfel încât $x_1 \circ x_2 \circ x_3 \circ \dots \circ x_n$ să fie număr natural;
c) $2022 \circ 2024 < 2023 \circ 2023$.

SOLUȚIE:

a) Fie $a = x \circ y$ și $b = 2^{\frac{1}{3}\log_2 x \cdot \log_2 y}$.
Atunci $\log_2 a = \log_2 \sqrt[3]{x^{\log_2 y}} = \frac{1}{3}\log_2 x^{\log_2 y} = \frac{1}{3}\log_2 x \cdot \log_2 y = \log_2 b \Rightarrow a = b$ 2p
Sau: Deoarece $x = 2^{\log_2 x}$, $x \circ y = x^{\frac{1}{3}\log_2 y} = 2^{\frac{1}{3}\log_2 x \cdot \log_2 y}$.
b) Prin inducție matematică
$x_1 \circ x_2 \circ x_3 \circ \dots \circ x_n = 2^{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \log_2 x_1 \cdot \log_2 x_2 \cdot \log_2 x_3 \cdot \dots \cdot \log_2 x_n}$ (folosind asociativitatea și punctul a.) 1p
Alegem $x_1 = 2^{3 \cdot 1}, x_2 = 2^{3 \cdot 2}, x_3 = 2^{3 \cdot 3}, \dots, x_n = 2^{3 \cdot n}, x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n$ 1p
Atunci $\log_2 x_1 \cdot \log_2 x_2 \cdot \log_2 x_3 \cdot \dots \cdot \log_2 x_n = 3^n \cdot n! \implies x_1 \circ x_2 \circ x_3 \circ \dots \circ x_n = 2^{3 \cdot n!} \in \mathbb{N}$ 1p
c) Trebuie arătat că $\log_2 2022 \cdot \log_2 2024 < (\log_2 2023)^2$ 1p
Folosind $a \cdot b < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2, \forall\, a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$, deducem că $\log_2 2022 \cdot \log_2 2024 < \left(\frac{\log_2 2022 + \log_2 2024}{2}\right)^2$ $< \left(\frac{\log_2(2022 \cdot 2024)}{2}\right)^2 < \left(\frac{\log_2 2023^2}{2}\right)^2 = (\log_2 2023)^2$, $(2022 \cdot 2024 = (2023 - 1) \cdot (2023 + 1) = 2023^2 - 1 < 2023^2)$. 1p

Subiectul 3.

În urma unui accident, la o fabrică de produse chimice, se produce o poluare a mediului din apropierea fabricii. Coeficientul de poluare este modelat prin numărul real $I_n = 100 \cdot \int_1^2 \frac{dx}{x^n\sqrt{1+x^2}}$, $n \in \mathbb{N}$. I_0 este coeficientul de poluare imediat după accident, I_n este coeficientul de poluare, în ziua „n”, după accident. Mediul este considerat nepoluat dacă coeficientul de poluare este cel mult egal cu 5.

a) Arătați că $I_0 > 50$.
b) Demonstrați că, în timp, coeficientul de poluare se micșorează (altfel spus arătați că $I_n \geq I_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$).
c) Arătați că, în cel mult 20 de zile, mediul devine nepoluat.

SOLUȚIE:

a) $I_0 = 100 \cdot \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = 100 \cdot \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\Big|_1^2 = 100 \ln \frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}} = 50 \ln \frac{9+4\sqrt{5}}{3+2\sqrt{2}} > 50 \ln 3 > 50$................ 3p
b) $I_n - I_{n+1} = 100 \cdot \int_1^2 \frac{x-1}{x^{n+1}\sqrt{1+x^2}} dx \geq 0$, deoarece $f(x) = \frac{x-1}{x^{n+1}\sqrt{1+x^2}} \geq 0, \forall x \in [1,2]$ 2p
c) $I_{20} = 100 \cdot \int_1^2 \frac{1}{x^{20}\sqrt{1+x^2}} dx < 100 \int_1^2 \frac{1}{x^{21}} dx = 100 \cdot \frac{x^{-2}}{-2}\Big|_1^2 = 5\left(1 - \frac{1}{2^{20}}\right) < 5$ 2p

Subiectul 4.

Funcția $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numește asociată funcției continue $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dacă $g(x) + \int_0^x f(x-t)dt = e^x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

a) Determinați funcția $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ asociată funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{|x|+1}$.
b) Dacă $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este asociată funcției continue $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, arătați că g este derivabilă și $g'(x) = e^x - f(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
c) Determinați funcția continuă $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dacă, funcția asociată acesteia, este egală cu funcția f.

SOLUȚIE:

a) $g(x) = e^x - \int_0^x f(x-t)dt = e^x - \int_0^x \frac{1}{|x-t|+1} dt$ 1p
Dacă $x \geq 0$, cum $t \in [0,x] \Longrightarrow x - t \geq 0 \Longrightarrow g(x) = e^x - \int_0^x \frac{1}{x-t+1} dt = e^x + \ln|x-t+1|\big|_0^x$
$= e^x - \ln(x+1)$ 1p
Dacă $x < 0$, cum $t \in [x,0] \Longrightarrow x - t \leq 0 \Longrightarrow g(x) = e^x - \int_0^x \frac{1}{t-x+1} dt = e^x - \ln|t-x+1|\big|_0^x$
$= e^x + \ln(1-x)$ 1p
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ g(x) = \begin{cases} e^x + \ln(1-x), & x < 0 \\ e^x - \ln(x+1), & x \geq 0 \end{cases}$
b) Fie F primitivă a funcției f, atunci $g(x) = e^x + F(x-t)|_0^x = e^x + F(0) - F(x)$ 1p
g este derivabilă și $g'(x) = e^x - f(x)$ 1p
c) Dacă f este asociată funcției continue f, atunci f este derivabilă și $f'(x) = e^x - f(x) \Longrightarrow \left(e^x f(x)\right)'$
$= e^{2x} \Longrightarrow e^x f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C \Longrightarrow f(x) = \frac{1}{2}e^x + Ce^{-x}, \ C \in \mathbb{R}$ 1p
Cum $f(0) = 1 \Longrightarrow C = \frac{1}{2}$ și atunci $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ 1p