MINISTERUL EDUCAȚIEI

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "*ADOLF HAIMOVICI*"

ETAPA JUDEȚEANĂ
26 martie 2022

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică – toate profilurile
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
Clasa a XII –a

Subiectul 1.

Pe mulțimea numerelor reale definim legea de compoziție $x * y = -2xy + 4x + 4y - 6$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că legea”$*$” este asociativă și determinați elementul neutru al legii.

b) Determinați numerele întregi x pentru care $\underbrace{x * x * \ldots * x}_{2022 \text{ de ori}} = x$.

c) Pe o tablă sunt scrise numerele de la 0 la 31. Un elev șterge la întâmplare două numere a și b și în locul lor scrie rezultatul compunerii lui a cu b după legea ”$*$”. Aflați ce număr se va scrie ultimul pe tablă dacă elevul repetă cele prezentate până când pe tablă rămâne un singur element.

SOLUȚIE:

a) Verifică asociativitatea 1p

Determină elementul neutru $e = \frac{3}{2} \in \mathbb{R}$ 1p

b) Deduce că $\underbrace{x * x * \ldots * x}_{de\ n\ ori} = (-2)^{n-1}(x-2)^n + 2,\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ și demonstrează prin inducție 1p

$\underbrace{x * x * \ldots * x}_{x \text{ de } 2022 \text{ de ori}} = x \Leftrightarrow (-2)^{2021}(x-2)^{2022} - (x-2) = 0$. Se obține $x - 2 \in \left\{-\frac{1}{2}, 0\right\} \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{3}{2}, 2\right\}$ 1p

Cum $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 2$ 1p

c) Demonstrează că $x * 2 = x, \forall x \in \mathbb{R}$ și $2 * y = y, \forall y \in \mathbb{R}$ 1p

Argumentează de ce 2 este ultimul număr scris pe tablă....................1p

Subiectul 2.

Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $M(t) = -\frac{t}{3}A + \frac{t^2}{3}B,\ t \in \mathbb{R}$. Considerăm mulțimea $G = \left\{M(t) / t \in \mathbb{R}^*\right\}$.

a) Determinați matricele A^2 și $A \cdot B$.

b) Arătați că mulțimea G este parte stabilă a lui $M_3(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricilor.

c) Demonstrați că $(G, \cdot)$ este grup abelian, unde “$\cdot$” reprezintă înmulțirea matricilor.

SOLUȚIE:

a) Obține $A^2 = 3A$ și $A \cdot B = O_3$ 2p

b) $M(t) \cdot M(u) = \frac{tu}{9}A^2 - \frac{tu^2}{9}AB - \frac{ut^2}{9}BA + \frac{(tu)^2}{9}B^2$, cu $t, u \in \mathbb{R}^*$ 1p

Se obține $M(t) \cdot M(u) = M(-tu)$ și cum $t, u \in \mathbb{R}^* \Rightarrow tu \in \mathbb{R}^*$, deci G este parte stabilă 1p

c) Verifică asociativitatea și comutativitatea 1p

Determină elementul neutru $M(-1) = I_3 \in G$ 1p

Orice element $M(t) \in G$ este simetrizabil, simetricul este $M\left(\frac{1}{t}\right) \in G$ cu $t \in \mathbb{R}^*$ 1p

Subiectul 3.

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x+1)^3-3x^2-1$.

a) Calculați $\int_0^1 f(x)dx$.

b) Să se determine numărul real $a>1$ astfel încât $\int_1^a (f(x)-x^3)\cdot e^x dx=6e^a$

c) Să se calculeze $\int_0^1 (3x^2+3)\cdot f^{2022}(x)dx$.

SOLUȚIE:

a) $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (x^3+3x)dx=\frac{7}{4}$ 2p

b) $\int_1^a (f(x)-x^3)\cdot e^x dx=6e^a \Leftrightarrow \int_1^a 3x\cdot e^x dx=6e^a \Leftrightarrow \int_1^a x\cdot e^x dx=2e^a$ 1p

Integrând prin părți, se obține $(a-3)e^a=0 \Leftrightarrow a=3$ 2p

c) $\int_0^1 (3x^2+3)\cdot f^{2022}(x)dx=\int_0^1 (3x^2+3)\cdot(x^3+3x)^{2022}dx=\int_0^4 t^{2022}dt$, unde $x^3+3x=t$ 1p

Finalizează $\int_0^1 (3x^2+3)\cdot f^{2022}(x)dx=\frac{4^{2023}}{2023}$ 1p

Subiectul 4.

Într-un vas de cultură sunt, la momentul $t=0$, 1000 de bacterii. S-a observat că funcția $f:[0,\infty)\to(0,\infty)$, definită prin $f(t)=$ numărul de bacterii din vas la momentul t, satisface relația $f'(t)=0,02\cdot t\cdot f(t)$, pentru orice $t\geq 0$, unde f' reprezintă derivata funcției *f*.

a) Determinați funcția *f* cu această proprietate.
b) Demonstrați că pentru orice $t\geq 10$ numărul bacteriilor din vas este mai mare decât 2700.

SOLUȚIE:

a) $\frac{f'(t)}{f(t)}=\frac{t}{50}\Rightarrow \int \frac{f'(t)}{f(t)}dt=\int \frac{t}{50}dt$ 1p

$\ln(f(t))=\frac{t^2}{100}+c\Rightarrow f(t)=e^{\frac{t^2}{100}+c}=e^{\frac{t^2}{100}}\cdot e^c$ 2p

$f(0)=1000\Rightarrow e^c=1000\Rightarrow f(t)=1000\cdot e^{\frac{t^2}{100}}$ 1p

b) $f(10)=1000e$ 1p

$e>2,7\Rightarrow f(10)>2700$ 1p

Cum $t\geq 10$ și *f* este strict crescătoare $\Rightarrow f(t)\geq f(10)=1000e>2700$ 1p