INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
16 martie 2019

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Uman

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a IX -a

Problema 1. Un stadion are 20000 de locuri. Se desfăşoară un meci şi se vând toate biletele. Spectatorii intră pe stadion după următoarea regulă: în primul minut intră doi spectatori, în al doilea minut intră şase spectatori, în al treilea minut intră zece spectatori şi aşa mai departe până se umple stadionul. În cât timp se umple stadionul?

SOLUŢIE:

Notăm cu $a_n, n\in\mathbb{N}^*$, numărul de spectatori care intră pe stadion în momentul *n*.

Avem: $a_1=2, a_2=6, a_3=10$.

Se deduce că $a_n \ _{n\geq 1}, n\in\mathbb{N}$ este o progresie aritmetică cu $a_1=2, r=4$.

$$S_n=a_1+a_2+...+a_n=\frac{a_1+a_n \ \cdot n}{2}=\frac{2+4n-2 \ \cdot n}{2}=2n^2.$$

$S_n=20000$, deci $2n^2=20000$ și obținem $n=100$.

Notează $a_n, n\in\mathbb{N}^*$ numărul de spectatori care intră pe stadion în minutul n 1p

Găseşte $a_n \ _{n\geq 1}, n\in\mathbb{N}$ progresie aritmetică cu $a_1=2, r=4$ 2p

Scrie suma $S_n=a_1+a_2+...+a_n=\dfrac{a_1+a_n \ \cdot n}{2}$ 1p

$S_n=\dfrac{2+4n-2 \ \cdot n}{2}=2n^2$..1p

Rezultă $S_n=20000$, şi determină $n=100$. 2p

Problema 2. Se consideră triunghiul ABC şi punctele D,E,F, astfel încât: D este mijlocul lui BC, E este mijlocul lui AD şi F este mijlocul lui AE.

Să se demonstreze că:

a) $\overrightarrow{BE}=\dfrac{\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AB}}{4}$.

b) $\overrightarrow{FC}=\dfrac{7\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}}{8}$.

SOLUŢIE:

a) În $\triangle BAD,\ BE$ este mediană şi avem:

$$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\ \overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BA}\ =\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{AB}}{4}=\frac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}}{4}=\frac{\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AB}}{4}.$$

b) În $\triangle ACE,\ CF$ este mediană şi obţinem: $\overrightarrow{CF}=\dfrac{1}{2}\ \overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CA}$

CE este mediană în $\triangle CAD$ şi avem: $\overrightarrow{CE}=\dfrac{1}{2}\ \overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA}$

şi obţinem:

$$\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ \overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA}\ +\overrightarrow{CA}\right)=\frac{\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{CA}}{4}$$

D – mijlocul $BC\ \Rightarrow \overrightarrow{CD}=\dfrac{\overrightarrow{CB}}{2}=\dfrac{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}}{2}$ şi $\overrightarrow{CF}=\dfrac{7\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}}{8}=\dfrac{\overrightarrow{AB}-7\overrightarrow{AC}}{8}$

Deci $\overrightarrow{FC}=\dfrac{7\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}}{8}$

a) Figura 1p

$\overrightarrow{BE}=\dfrac{1}{2}\ \overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BA}$ 1p

Înlocuieşte $\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$ 1p

Finalizează 1p

b) $\overrightarrow{CF}=\dfrac{1}{2}\ \overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CA}$ 1p

Găseşte $\overrightarrow{CF}=\dfrac{\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{CA}}{4}$ 1p

Finalizează 1p

Problema 3.

a) Calculaţi numerele x şi y ştiind că numerele $x-1, 3x-4, x+5$ formează, în această ordine, o progresie aritmetică, iar numerele $2, \sqrt{11+5y}, 1+7y$, formează, în această ordine, o progresie geometrică.

b) Se consideră o mulţime H de numere reale care are proprietăţile $1\in H$ și dacă $2h\in H$, atunci $h\in H$. Demonstraţi că $\dfrac{1}{8}\in H$.

SOLUȚIE:

a) Condiţia ca numerele $x-1, 3x-4, x+5$ să fie în progresie aritmetică este echivalentă cu $2\ \ 3x-4\ \ =x-1+x+5$; de aici avem $x=3$. Condiţia ca $2, \sqrt{11+5y}, 1+7y$ să fie în progresie geometrică este echivalentă cu $2(1+7y)=11+5y$, în condiţiile $\begin{cases} 11+5y\geq 0 \\ 1+7y\geq 0 \end{cases}$, obţinem $y=1$.

b) $1\in H$

$1=2\cdot\frac{1}{2}\in H\Rightarrow\frac{1}{2}\in H$

$\frac{1}{2}=2\cdot\frac{1}{4}\in H\Rightarrow\frac{1}{4}\in H$

$\frac{1}{4}=2\cdot\frac{1}{8}\in H\Rightarrow\frac{1}{8}\in H$

BAREM:

a) Scrie condiţia $2\ \ 3x-4\ \ =x-1+x+5$ 1p

Determină $x=3$.. 1p

Scrie condiţia $2(1+7y)=11+5y$ şi condiţiile de existenţă 1p

Determină $y=1$. 1p

b) Justifică faptul că $\frac{1}{2}\in H$ 1p

Justifică faptul că $\frac{1}{4}\in H$ 1p

Justifică faptul că $\frac{1}{8}\in H$ 1p

Problema 4. Într-un pom fermecat sunt 2018 de mere, 2019 de portocale și 2020 de pere. Din pom, se pot lua o dată numai două fructe de feluri diferite și, în acest caz, în pom crește un fruct din al treilea fel. Știind că se culeg fructe din pom până ce rămâne un singur fruct, determinați care este acesta.

BAREM:

Oricum am alege cele două fructe diferite, după ce se mărește numărul de fructe din cealaltă categorie cu o unitate, numărul merelor și numărul perelor au aceeași paritate...4p

La sfârșit nu poate rămâne un măr și zero pere, dar nici o pară și zero mere...2p

Ultimul fruct rămas în copac este o portocală...1p

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

CONCURSUL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

ETAPA JUDEŢEANĂ
16 martie 2019

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Uman

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a X -a

Problema 1. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţiile:

a) $2\log_2^2\left(4x^2\right) - \log_2\left(8x\right) + \dfrac{1}{2} = 0.$

b) $32^{\frac{x+7}{x-5}} = 0,25 \cdot 128^{\frac{x+19}{x-1}}$.

SOLUŢIE:

a) C.E. $x > 0$

Notăm $\log_2 x = t, t \in \mathbb{R}$

$\log_2\left(4x^2\right) = \log_2 4 + \log_2 x^2 = 2 + 2\log_2 x = 2 + 2t$

$\log_2\left(8x\right) = \log_2 8 + \log_2 x = 3 + \log_2 x = 3 + t$

Ecuaţia devine:

$$2(2+2t)^2 - 3 - t + \frac{1}{2} = 0 \text{ sau } 16(t+1)^2 - 6 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow 16t^2 + 32t + 16 - 2t - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$16t^2 + 30t + 11 = 0$$

Se obţine: $t_1 = -\dfrac{1}{2}, t_2 = -\dfrac{11}{8}$

Deci $\log_2 x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sau $\log_2 x = -\dfrac{11}{8} \Rightarrow x = \dfrac{\sqrt[8]{2^5}}{4}$

Deci soluţia: $S = \left\{\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt[8]{2^5}}{4}\right\}.$

b) C.E.: $\begin{cases} x-5 \neq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 5 \\ x \neq 1 \end{cases}$

$$2^{5\cdot\frac{x+7}{x-5}} = 2^{-2} \cdot 2^{7\cdot\frac{x+19}{x-1}} \Leftrightarrow 5 \cdot \frac{x+7}{x-5} = -2 + 7 \cdot \frac{x+19}{x-1} \Leftrightarrow \frac{5(x+7)}{x-5} = -2 + \frac{7(x+19)}{x-1} \Leftrightarrow$$

$$5(x+7)(x-1) = (x-5)(-2x+2+7x+133) \Leftrightarrow 5\left(x^2+6x-7\right) = (x-5)(x+2) \cdot 5 \Leftrightarrow 16x = 128 \Leftrightarrow x = 8$$

BAREM:

a) Condiţii de existenţă

Notaţie $\log_2 x = t, t \in \mathbb{R}$ $\log_2^2 \ 4x^2 \ = \ 2+2t \ ^2 \log_2 \ 8x \ = 3+t$ 2p

Rezolvă ecuaţia $16t^2 + 30t + 11 = 0$ 1p

Determină soluţia $S = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt[8]{2^5}}{4} \right\}$. 1p

b) Condiţia de existenţă şi relaţia: $2^{5 \cdot \frac{x+7}{x-5}} = 2^{-2} \cdot 2^{7 \cdot \frac{x+19}{x-1}}$ 1p

Relaţia $\frac{5(x+7)}{x-5} = -2 + \frac{7(x+19)}{x-1}$ 1p

Determină $x = 8$ 1p

Problema 2. O minge de baschet are traiectoria parabolică descrisă de ecuaţia $y = -x^2 + 6x - 5$, cu $x \in \left[\frac{3}{2}, 5\right]$. Este posibil ca mingea să intre în coşul de baschet situat la înălţimea de 3m? Justificaţi răspunsul.

SOLUŢIE:

$y = -x^2 + 6x - 5,\ x \in \left[\frac{3}{2}, 5\right]$.

Considerăm funcţia: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 6x - 5$

Graficul funcţiei este o parabolă.

$V(3,4),\ f\left(\frac{3}{2}\right) = 1{,}75,\ \ f(5) = 0,\ A\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right), B(5,0)$

Arcul de parabolă AB este traiectoria mingii de baschet. Pentru ca mingea să intre în coş la înălţimea $h = 3$m rezolvăm $f \ \ x \ = 3$ şi obţinem $x_1 = 2$ (nu convine) sau $x_2 = 4$.

Soluţia este $x = 4$.

BAREM:

Scrierea funcţiei: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 6x - 5$ 1p

Determinarea $V(3,4), A\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right), B(5,0)$ 2p

Traiectoria mingii 2p

Rezolvarea ecuaţiei $f \ \ x \ = 3$ 1p

Justifică alegerea soluţiei $x = 4$. 1p

Problema 3. Ionuţ a primit cadou de ziua lui o motocicletă Honda. A doua zi Ionuţ parcurge, într-o mişcare rectilinie şi uniformă, distanţa de 120 km dintre localităţile A şi D, cu viteza constanta v, trecând prin localităţile B şi C ($B, C \in AD, AB = BC = CD = \frac{AD}{3}$). Arătaţi că, dacă Ionuţ ar parcurge, cu motocicleta cea nouă, fiecare dintre distanţele AB, BC, CD cu o altă viteză, astfel încât media aritmetică a vitezelor să fie totuşi egală cu v, atunci timpul necesar parcurgerii distanţei AD ar fi mai mare decât în cazul parcurgerii întregii distanţe cu viteza constantă v.

SOLUȚIE:

Din condiţia $AB = BC = CD = \frac{AD}{3} = d$ avem $d = 40\,\text{km}$

Fie v_1, v_2, v_3 vitezele cu care parcurge distanţele AB, BC, CD, respectiv t_1, t_2, t_3 timpii corespunzători.

Avem: $v = \frac{v_1 + v_2 + v_3}{3}$

$t_1 = \frac{40}{v_1}, t_2 = \frac{40}{v_2}, t_3 = \frac{40}{v_3}$ și $t = \frac{120}{v}$

Demonstrăm că $t_1 + t_2 + t_3 > t$ relaţie echivalentă cu

$$40\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}\right) > \frac{120}{v} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}\right) v_1 + v_2 + v_3 > 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{v_1}{v_2} + \frac{v_2}{v_1} + \frac{v_1}{v_3} + \frac{v_3}{v_1} + \frac{v_2}{v_3} + \frac{v_3}{v_2} > 6$$

Dar:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{v_1}{v_2} + \frac{v_2}{v_1} \geq 2 \\ \frac{v_1}{v_3} + \frac{v_3}{v_1} \geq 2 \\ \frac{v_2}{v_3} + \frac{v_3}{v_2} \geq 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}\right) v_1 + v_2 + v_3 > 9 \text{ (inegalitate strictă deoarece avem } v_1 \neq v_2 \text{ sau } v_1 \neq v_3 \; v_2 \neq v_3\text{)}$$

<u>BAREM:</u>

Notează v_1, v_2, v_3 vitezele pe segmentele AB, BC, CD, şi t_1, t_2, t_3 timpii 1p

Trebuie sa demonstrăm inegalitatea $t_1 + t_2 + t_3 > t$ (*) 1p

Exprimă t_1, t_2, t_3, t în funcţie de v_1, v_2, v_3, t 1p

Scriem inegalitatea (*) sub forma $\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}\right) v_1 + v_2 + v_3 > 9$ 1p

Stabileşte echivalenţa relaţiei (*) cu $\frac{v_1}{v_2} + \frac{v_2}{v_1} + \frac{v_1}{v_3} + \frac{v_3}{v_1} + \frac{v_2}{v_3} + \frac{v_3}{v_2} > 6$ 1p

$$\begin{array}{l} \frac{v_1}{v_2} + \frac{v_2}{v_1} \geq 2 \\ \frac{v_1}{v_3} + \frac{v_3}{v_1} \geq 2 \\ \frac{v_2}{v_3} + \frac{v_3}{v_2} \geq 2 \end{array}$$
.... 1p

Finalizare 1p

Problema 4. Determinaţi $x, y \in \mathbb{N}$, ştiind că $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + ... + 2^{x+y} = 992.$

SOLUŢIE:
Relaţia din enunţ este echivalentă cu:

$$2^x + 2^x \cdot 2 + 2^x \cdot 2^2 + ... + 2^x \cdot 2^y = 992 \Leftrightarrow 2^x \cdot \ 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^y \ = 992 \Leftrightarrow 2^x \cdot \frac{2^{y+1} - 1}{2 - 1} = 992 = 2^5 \cdot 31$$

$2^{y+1} - 1$ număr impar $\ 2^{y+1} - 1, 2^x \ \in \ 1, 992 \ , \ 31, 32 \ \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases}$

<u>BAREM:</u>

Scoate factor comun 2^x 1p

Scrie suma $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^y = 2^{y+1} - 1$ 2p

Determină ecuaţia $2^x \ 2^{y+1} - 1 \ = 992$ 1p

Descompune $992 = 2^5 \cdot 31 = 1 \cdot 992$ 1p

Determină $2^{y+1} - 1 = 31 \Rightarrow y = 4$ 1p

Determină $2^x = 2^5$ cu $x = 5$ 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
16 martie 2019

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Uman

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a XI -a

Problema 1.

BAREM:

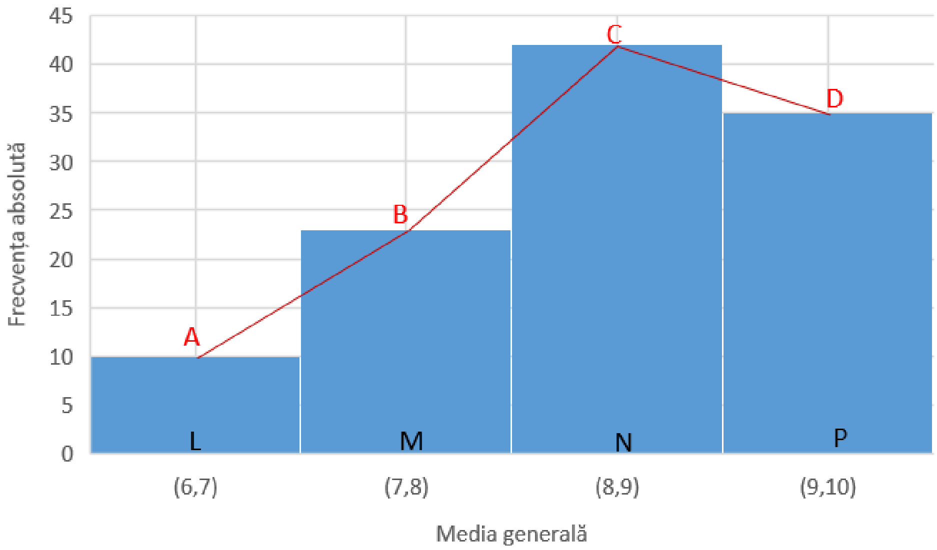
a)

INTERVALE DE VARIAȚIE (I_i)	FRECVENȚA ABSOLUTĂ (n_i)
$I_1=[6,7)$	10
$I_2=[7,8)$	23
$I_3=[8,9)$	42
$I_4=[9,10]$	35

....2p

b) $p\%=\frac{n_3+n_4}{110}\cdot 100\ (\%)=\frac{42+35}{110}\cdot 100(\%)=70\%$ 2p

c)



....1p

$A=A_{ABML}+A_{BCNM}+A_{CDPN}$

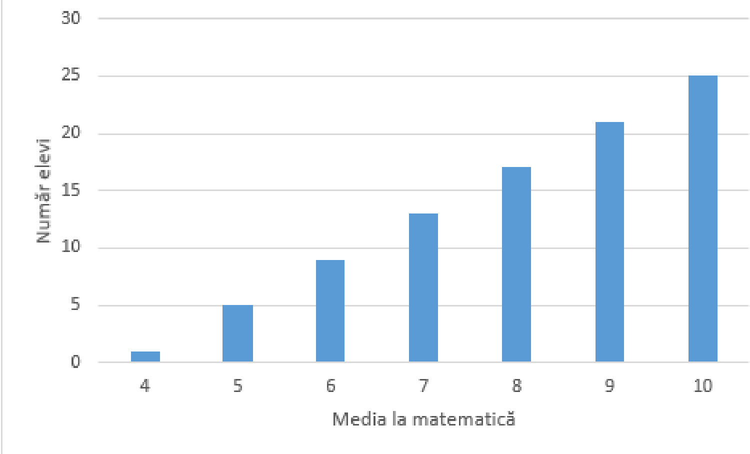
$A=\frac{(10+23)\cdot 1}{2}+\frac{(23+42)\cdot 1}{2}+\frac{(42+35)\cdot 1}{2}=87,5\ (u^2)$ 2p

Problema 2.

BAREM:

a) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geq\frac{a+b}{2}\Leftrightarrow\frac{a^2+b^2}{2}\geq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ 1p

$2a^2+2b^2\geq a^2+2ab+b^2\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2\geq 0\Leftrightarrow(a-b)^2\geq 0$ ....1p b)



....1p

c)

$$m_p = \frac{4 \cdot 1 + 5 \cdot 5 + 6 \cdot 9 + 7 \cdot 13 + 8 \cdot 17 + 9 \cdot 21 + 10 \cdot 25}{1 + 5 + 9 + 13 + 17 + 21 + 25} = 8{,}23$$

$$m_a = \frac{4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10}{7} = 7$$

Deoarece peste 40% din populație corespunde valorilor 8 și 9 și doar aproximativ 14% din populație corespunde valorii 7, media aritmetică ponderată caracterizează mai bine distribuția populației. 1p

d) $f: R \to R, f(x) = ax + b, A(4{,}1), B(5{,}5) \in Gf$

$f: R \to R, f(x) = 4x - 15$

Celelalte puncte verifică relația $f(m_i) = n_i$. 1p

e) numărul termenilor din sumă este $n = \frac{2021-1}{4} + 1 = 506$

termenii din sumă sunt în progresie geometric cu rația 2^4 ....1p

$2^1 + 2^5 + 2^9 + 2^{13} + 2^{17} + \dots + 2^{2021} = 2 \cdot \frac{(2^4)^{506} - 1}{2^4 - 1} = \frac{2}{15}(2^{2024} - 1) < 2^{2024} - 1$ 1p

Problema 3.

BAREM:

a) (x_1, x_2, x_4, x_1) sau $(x_1, x_2, x_4, x_6, x_1)$ sau (x_1, x_4, x_6, x_1) 1p

b) numărul muchiilor este 7, iar $d(x_1) + ... + d(x_1) = 3 + 2 + 1 + 3 + 2 + 3 = 14$, deci egalitatea este adevărată.. 1p

c) $(x_1, x_3); (x_1, x_5); (x_2, x_3); (x_2, x_5); (x_2, x_6); (x_3, x_4); (x_3, x_6); (x_4, x_5)$ 2p

d) Lungimile celor două trasee sunt $a + \frac{1}{a}$ și $b + \frac{1}{b}$. Utilizează $0 < a < b < 1$ pentru a demonstra inegalitatea

$a + \frac{1}{a} > b + \frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{(a-b)(ab-1)}{ab} > 0$ 2p

Concluzia: traseul cel mai scurt este (x_1, x_6, x_4) 1p

Problema 4.

BAREM:

a) În primul an va fi o singură afecțiune; în al doilea an vor fi $1 + 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 = 4$; în al treilea an vom avea $1 + 4 + 2 \cdot 1 \cdot 4 = 13$; în al patrulea an $1 + 13 + 2 \cdot 1 \cdot 13 = 40$, iar în al cincilea an $1 + 40 + 2 \cdot 1 \cdot 40 = 121$ 2p

b) $a_n = 1 + 3a_{n-1} = 1 + 3(1 + 3a_{n-2}) = ... = 1 + 3 + 3^2 + ... + 3^{n-1} = \frac{3^n - 1}{2}$ 2p

c) regula de apariție a afecțiunilor este $a+b+2ab$, iar numărul adăugat anual este $a=1$, pentru care obținem regula $1+3b \Rightarrow$ conform b), după n ani, $\frac{3^n-1}{2}$ 2p

Concluzia: $\frac{3^n-1}{2}<\frac{3^n}{2}$ este adevărată pentru $\forall n \in \mathbb{N}^*$ 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
16 martie 2019

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Uman

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XII-a

Problema 1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

a) Calculați: A^3-A^2+A.

b) Calculați: $I_3+A-A^2+A^3+A^4-A^5+A^6+...+A^{2017}-A^{2018}+A^{2019}$.

BAREM:

a) $A^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ 1p

$A^3=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ 1p

$A^3-A^2+A=O_3$. 2p

b) Din a) avem: $A-A^2+A^3=O_3$, $A^4-A^5+A^6=O_3,\dots,$ $A^{2017}-A^{2018}+A^{2019}=O_3$ 1p

Există 673 grupe în suma $(A-A^2+A^3)+(A^4-A^5+A^6)+...+(A^{2017}-A^{2018}+A^{2019})$ 1p

În concluzie, $I_3+A-A^2+A^3+A^4-A^5+A^6+...+A^{2017}-A^{2018}+A^{2019}=I_3$ 1p

Problema 2.

Fie matricea $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ și mulțimea matricelor pătratice de ordinul 2 cu elemente numere reale $M(A)=\{X \mid XA=AX\}$.

a) Demonstrați că dacă $X\in M(A)$, atunci există numerele reale x și y astfel încât $X=\begin{pmatrix}x & 0\\ y & x\end{pmatrix}$.

b) Rezolvați ecuația $X+X^2=A$ în mulțimea matricelor pătratice de ordinul 2 cu elemente numere reale.

BAREM:

a) Fie $X\in M(A)$, $X=\begin{pmatrix}x & z\\ y & t\end{pmatrix}$, x, y, z, t numere reale.

Din $XA=AX$ rezultă $\begin{pmatrix}2x+3z & 2z\\ 2y+3t & 2t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x & 2z\\ 3x+2y & 3z+2t\end{pmatrix}$ 1p

Obținem sistemul $\begin{cases} 2x+3z=2x \\ 2y+3t=3x+2y \\ 2t=3z+2t \end{cases}$ 1p

Urmează $z=0$, $t=x$. În concluzie, $X=\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$, cu x, y numere reale..1p

b) Dacă în relația $X+X^2=A$ înmulțim cu X la stânga și apoi la dreapta obținem: $X^2+X^3=XA$ și $X^2+X^3=AX$, de unde rezultă $AX=XA$, iar din a) rezultă $X=\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$ 1p

$X^2=\begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 2xy & x^2 \end{pmatrix}$...1p

$X^2+X=\begin{pmatrix} x^2+x & 0 \\ y+2xy & x^2+x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ de unde rezultă $\begin{cases} x^2+x=2 \\ y+2xy=3 \end{cases}$.......................................1p

Rezolvând sistemul precedent obținem soluțiile: (1, 1) și (-2, -1) 1p

Problema 3.

Se consideră determinantul $D(x,y)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & 2 \\ x^2+1 & y^2+1 & 5 \end{vmatrix}$, unde x, y sunt numere reale.

a) Demonstrați că $D(x,y)=(x-2)(y-2)(y-x)$, pentru orice numere reale x, y.

b) Determinați numerele reale x pentru care $D(2^x,4^x)=0$.

SOLUȚIE:

a) $D(x,y)=2x^2-2y^2+xy^2-x^2y-4x+4y$ 2p

$D(x,y)=-2(y^2-x^2)+xy(y-x)+4(y-x)=-2(y-x)(y+x)+xy(y-x)+4(y-x)$

Rezultă $D(x,y)=(y-x)(-2y-2x+xy+4)=(y-x)[y(x-2)-2(x-2)]=(x-2)(y-2)(y-x)$..............2p

b) Din a) avem: $D(2^x,4^x)=(2^x-2)(4^x-2)(4^x-2^x)=0$...1p

Urmează $2^x=2;\ 4^x=2;\ 4^x=2^x$ 1p

Rezolvând ecuațiile anterioare obținem $x\in\left\{0;\frac{1}{2};1\right\}$ 1p

Problema 4.

Fie matricea $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Andrei obține noi matrice schimbând semnele tuturor elementelor dintr-o linie sau coloană din matricea A și apoi urmând același procedeu cu matricele obținute.

a) Calculați determinantul matricei A.

b) Scrieți un șir de transformări p în care plecând de la matricea A, Andrei obține o matrice cu prima linie cu toate elementele egale cu -1.

c) Poate obține Andrei o matrice în care două linii au toate elementele egale cu 1?

SOLUȚIE:

a) det $A=4$...2p

b) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

sau $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 2p

c) Dacă B este obținută din A și are două linii cu toate elementele egale cu 1, rezultă că $\det B = 0$.............2p
Dar $|\det B| = |\det A|$, fals 1p