CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

Filiera Teoretică : profilul Uman

Clasa a X-a

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Problema 1.

Rezolvaţi în ***R*** ecuațiile:

a) $\log_2(\log_2(5x-4)) = 1 + \log_2(\log_2 x)$

b) $2^{\sqrt{\log_2(x+1)}} - 2 = 2 - (x+1)^{\sqrt{\log_{x+1} 2}}$

Soluție:

a) Condiţii de existenţă:

$\begin{cases} 5x-4>0 \\ \log_2(5x-4)>0 \\ \log_2 x>0 \end{cases}$. Obține $x\in(1,\infty)$ -- 1 pct.

Scrie ecuaţia $\log_2(\log_2(5x-4))=\log_2(2\log_2 x)$ --- 1 pct.

Obține $x^2 - 5x + 4 = 0$ -- 1 pct.

Rezolvă şi alege valoarea $x=4$ -- 1 pct.

b) Condiţii de existenţă:

$\begin{cases} x+1>0 \\ x+1\neq 1 \\ \log_2(x+1)\geq 0 \end{cases}$ Obține $x>0$ -- 1 pct.

Notează $\log_2(x+1) = t, t \geq 0$

Obține $x+1 = 2^t$ şi scrie ecuația $2^{\sqrt{t}} - 2 = 2 - 2^{\sqrt{t}}$ --1 pct.

Rezultă $x=1$ --- 1 pct

Problema 2.

Se consideră funcția $f: R \to R, f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

a) Să se demonstreze că funcția f este strict crescătoare pe R.

b) Să se rezolve în ***R*** ecuația $f(x) = m, m \in \mathbb{R}$. Discuție după valorile parametrului *m*.

Soluție:

a) Explicitează funcția --- 1 pct.
Studiază monotonia pe intervalul $(-\infty, 0)$ -- 1 pct.
Studiază monotonia pe intervalul $(0, +\infty)$ --- 1 pct.
Concluzie -- 1 pct

b) Rezolvă $f(x) = m, x < 0$ şi găseşte $x=\frac{m}{m+1}$, $m\in(-1,0)$. ----------------------- 1,5 pct

Rezolvă $f(x) = m, x \geq 0$ și găsește $x = \frac{m}{1-m}, m \in [0,1)$ ---------------------------- 1,5 pct

Problema 3.

a) Să se demonstreze că: $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = 4$.

b) Să se rezolve ecuaţia: $\sqrt{7-x} + \sqrt{x-5} = \sqrt{2}$.

Soluție:

a) Notează $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} = a$ și $\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = b$ -- 1 pct.

Deduce că $a \cdot b = 2$ -- 1 pct.

Notează $a+b=t$ și obține ecuaţia $t^3 - 6t - 40 = 0$ ---1 pct.

Obține $t=4$ --1 pct

b) Obține condiţia de existenţă $x \in [5,7]$ -- 1 pct.

Rezultă $(7-x)(x-5)=0$ -- 1 pct.

Rezultă $x=5$ sau $x=7$ -- 1 pct.

Problema 4.

a) Sisif cară în fiecare zi câte o piatră din vârful unui munte. În prima zi i-au fost necesare 7 ore urcând şi coborând.

A doua zi a petrecut 8 ore urcând şi coborând. În fiecare zi urcă de două ori mai încet decât în ziua precedentă, dar coboară de două ori mai repede. Cât timp va munci în cea de-a treia zi?

b) Pe cele două maluri a ale unui râu se află doi palmieri înalţi de 10m, respectiv 15m. Distanţa dintre ei este de 25m. În vârful fiecărui palmier stă câte o pasăre. La un moment dat, la suprafaţa râului, pe linia ce uneşte palmierii apare un peşte situat la distanţe egale cu cele două păsări. La ce distanţă de palmierul cel mai înalt a apărut peştele?

Soluție:

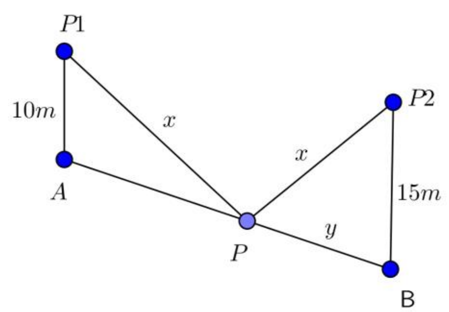
a) Notează x – timpul de urcare în prima zi și cu $(7-x)$ timpul de coborâre ----------------------- 1 pct.

A doua zi timpul de urcare este $2x$ și de coborâre este $8-2x$ -- 1 pct.

Din $8 - 2x = \frac{7-x}{2}$ obţine $x=3$ --- 1 pct.

A treia zi obţine timpul de urcare 12 ore şi de coborâre 1oră (așadar a treia zi muncește 13 ore)------- 1 pct.

b) Desen --- 1 pct.



Așadar $x^2 = y^2 + 15^2$ şi $x^2 = 10^2 + (25-y)^2$ --- 1 pct.

Rezultă $y=10$ -- 1 pct.