MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XII-a

BAREM

Problema 1.

Fie pe mulțimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi legea de compoziție "$\circ$", dată prin $x\circ y=3xy+3x+3y+2$, $(\forall)$ $x,\ y\in\mathbb{Z}$.

a) Verificați $x\circ y=3(x+1)(y+1)-1$, $(\forall)$ $x,\ y\in\mathbb{Z}$.

b) Demonstrați că "$\circ$" este comutativă și asociativă.

c) Stabiliți dacă structura $(\mathbb{Z};\circ)$ are element neutru.

d) Dacă $d_1,\ d_2,\ d_3,\ \dots,\ d_{4034}$ sunt divizorii întregi ai numărului 2^{2017}, calculați $d_1\circ d_2\circ d_3\ \dots\circ d_{4034}$.

__Soluție__:

a) $3(x+1)(y+1)-1=(3x+3)(y+1)-1=3xy+3x+3y+3-1=3xy+3x+3y+2=x\circ y$ 1p

b) Demonstrație pentru comutativitate 1p
Demonstrație pentru asociativitate 2p

c) Presupunând element neutru $e\in\mathbb{Z}$ se deduce $e=-\dfrac{2}{3}\notin\mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ $(\mathbb{Z};\circ)$ nu are element neutru 2p

d) Cum $x\circ(-1)=-1$ și $(-1)\circ y=-1$, $(\forall)x,\ y\in\mathbb{Z}$
și $(\mathbb{Z};\circ)$ este asociativă iar $d=-1$ este divizor al lui 2^{2017} $\Rightarrow$ $d_1\circ d_2\circ d_3\ \dots\circ d_{4034}=-1$ 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XII-a

BAREM

Problema 2.
Consumul de energie electrică realizat de familia Popescu, pe durata a 24 ore, este modelat de o funcție $K:[0;\,24]\to\mathbb{R}_+$, cu $K(0)=0$ și care este derivabilă și verifică $K'(t)=(t+1)e^{1-t}$, $(\forall)t\in[0;\,24]$, iar $K(t)$ reprezintă cantitatea de energie electrică consumată în intervalul de timp $[0;\,t]$, exprimat în Kw/h.

a) Demonstrați că $F(t)=-(t+1)\cdot e^{-t}$, $t\in\mathbb{R}$, este primitivă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(t)=t\cdot e^{-t}$.

b) Demonstrați $K(t)=2e-(t+2)\cdot e^{1-t}$, $(\forall)t\in[0;\,24]$.

c) Verificați că în prima oră familia Popescu consumă mai puțin de $2,5$ Kw/h.

d) Considerând, pe parcursul unei zile, intervalele orare $[0;\,1]$, $[1;\,2]$, $[2;\,3]$, ..., $[23;\,24]$, arătați că cel mai mare consum de energie electrică se realizează în intervalul orar $[0;\,1]$.

<u>**Soluție**</u>:

a) F este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $F'(t)=f(t)$, $(\forall)t\in\mathbb{R}$ 1p

b) $K(t)=\int(t+1)e^{1-t}dt=-(t+2)e^{1-t}+C$ 2p

$K(0)=0 \Rightarrow C=2e$ 1p

c) $K(1)=2e-3<2\cdot 2,72-3<2,5$ 1p

d) Consumul în a n-a oră, $n\geq 2$, este $g(n)=K(n)-K(n-1)=e^{1-n}\left((n+1)e-n-2\right)$ 1p

Se arată că $g(n)<g(n-1)$, $n\geq 2$ este echivalent cu $n(e-1)>2$,

inegalitate confirmată de $n\geq 2$ și $e-1>1$ 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ 18 martie 2017

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XII-a

BAREM

Problema 3.

Se consideră mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} / \, a, b \in \mathbb{Z}_6 \right\}$.

a) Determinați numărul elementelor mulțimii G.

b) Arătați că $(G;+)$ este grup abelian.

c) Calculați suma elementelor mulțimii G.

<u>**Soluție**</u>:

a) Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in G$.

Cum $a \in \mathbb{Z}_6$ poate fi ales în 6 moduri și $b \in \mathbb{Z}_6$ tot în 6 moduri, G are 36 de elemente 2p

b) Se arată cu ușurință că pentru orice $A, B \in G \Rightarrow A+B \in G$ și $(G;+)$ este structură comutativă și asociativă, cu element neutru $O_2=\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$ iar fiecare $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in G$ are simetrică $-A=\begin{pmatrix} -a & -b \\ -b & -a \end{pmatrix} \in G$ 3p

c) Matricele $X \in G$ cu proprietatea $X=-X$ sunt $X=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ cu $a \in \{\hat{0}; \hat{3}\}$ și $b \in \{\hat{0}; \hat{3}\}$ și suma lor este matricea $O_2=\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$. Celelalte matrice X din G se asociază fiecare cu simetrica $-X$ și cum fiecare matrice este simetrică doar unei singure matrice, suma elementelor mulțimii G este $O_2=\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$ 2p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XII-a

BAREM

Problema 4.

Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+4}$

a) Demonstrați că $\int_0^1 f^2(x)\,dx=\frac{13}{3}$.

b) Calculați $\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}}\frac{dx}{x\cdot f(x)}$.

c) Calculați $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\int_0^x t^3 f(t)\,dt$

<u>Soluție</u>:

a) $\int_0^1 f^2(x)\,dx=\int_0^1\left(x^2+4\right)dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}+4x\right)\right|_0^1=\frac{13}{3}$ 2p

b) Notăm $\sqrt{x^2+4}=t \Rightarrow x^2+4=t^2 \Rightarrow xdx=tdt$

$x=\sqrt{5} \Rightarrow t=3$, $x=2\sqrt{3} \Rightarrow t=4$

$\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}}\frac{dx}{x\cdot f(x)}=\int_3^4\frac{t\,dt}{\left(t^2-4\right)\cdot t}=\int_3^4\frac{dt}{t^2-4}=\frac{1}{4}\ln\left.\left(\frac{t-2}{t+2}\right)\right|_3^4=\frac{1}{4}\ln\frac{5}{3}$ 3p

c) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\int_0^x t^3 f(t)\,dt=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\int_0^x t^3\sqrt{t^2+4}\,dt=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x t^3\sqrt{t^2+4}\,dt}{x^4}$, cu nedeterminare $\frac{0}{0}$

și cum funcția de integrat, $g(t)=t^3\sqrt{t^2+4}$, este primitivabilă, considerând o primitivă $G\in\int g(t)\,dt$

avem $\int_0^x t^3\sqrt{t^2+4}\,dt=G(x)-G(0)$ 1p

și atunci

$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x t^3\sqrt{t^2+4}\,dt}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{G(x)-G(0)}{x^4}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{G'(x)}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\sqrt{x^2+4}}{4x^3}=\frac{1}{2}$ 1p