MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XI-a

BAREM

Problema 1.

Fie matricea $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$.

a) Rezolvați ecuația $\det\left(I_3+xA\right)=0$, în necunoscuta $x\in\mathbb{R}$.

b) Demonstrați că $A^2=A+2I_3$.

c) Demonstrați că matricea B, cu $B=2A+I_3$, este inversabilă și are inversă matricea $C=\frac{2}{5}A-\frac{3}{5}I_3$.

d) Matricea $B=2A+I_3$ o transformăm în 2017 pași, în felul următor: la fiecare pas, în mod aleator, elementele de pe diagonala principală se măresc toate deodată sau se micșorează toate deodată cu 1 iar toate celelalte elemente se măresc toate deodată sau se micșorează toate deodată cu 3. Aflați dacă este posibil ca după parcurgerea celor 2017 pași matricea B să se transforme într-o matrice cu determinantul egal cu 2017.

<u>Soluție</u>:

a) $\det\left(I_3+xA\right)=\begin{vmatrix}1&x&x\\x&1&x\\x&x&1\end{vmatrix}=(2x+1)\cdot\begin{vmatrix}1&x&x\\1&1&x\\1&x&1\end{vmatrix}=(2x+1)(x-1)^2$

$\Rightarrow\ \det\left(I_3+xA\right)=0\ \Leftrightarrow\ x\in\left\{-\frac{1}{2};1\right\}$ 2p

b) $A^2=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}=A+2I_3$ 1p

c) $\det\left(2A+I_3\right)=5\neq 0\ \Rightarrow\ B$ este inversabilă 1p

$\left(2A+I_3\right)\left(\frac{2}{5}A-\frac{3}{5}I_3\right)=I_3$, deci $B^{-1}=C$ 1p

d) După 2017 pași matricea B ce transformă într-o matrice M de forma $M=\begin{pmatrix}p_1&q_1&q_2\\q_3&p_2&q_4\\q_5&q_6&p_3\end{pmatrix}$ cu termenii de pe diagonala principală pari și ceilalți termeni impari 1p

$\Rightarrow\ \det M=\textit{număr par}\neq 2017$ 1p

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XI-a

BAREM

Problema 2.

Considerăm matricele $A=\begin{pmatrix}6 & 11\\ 0 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ și mulțimea $G=\{X\in M_2(\mathbb{R})/\, A\cdot X=X\cdot A\}$.:

a) Demonstrați că $B\in G$.

b) Dacă $X\in G$, demonstrați că există $x,\ y\in\mathbb{R}$ și X este de forma: $\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & x\end{pmatrix}$.

c) Matricea $X\in M_2(\mathbb{R})$ verifică egalitatea $X^3-X=A$. Demonstrați că $X\in G$ și determinați toate matricele X cu această proprietate.

<u>Soluție</u>:

a) $A\cdot B=\begin{pmatrix}12 & 28\\ 0 & 12\end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix}12 & 28\\ 0 & 12\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $A\cdot B=B\cdot A$ $\Rightarrow$ $B\in G$ 2p

b) Fie $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in G$ $\Rightarrow$ $A\cdot X=X\cdot A$ 1p

și se obține $\begin{pmatrix}6a+11c & 6b+11d\\ 6c & 6d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6a & 11a+6b\\ 6c & 11c+6d\end{pmatrix}$ 1p

din care $c=0$, $a=d$ $\Rightarrow$ $X=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}$ 1p

c) Dacă $X^3-X=A$, cum $\left(X^3-X\right)\cdot X=X\cdot\left(X^3-X\right)$ $\Rightarrow$ $A\cdot X=X\cdot A$ $\Rightarrow$ $X\in G$,

deci X este de forma $X=\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & x\end{pmatrix}$, $x,\ y\in\mathbb{R}$ 1p

$X=\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & x\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix}x^3-x & 3x^2y-y\\ 0 & x^3-x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 11\\ 0 & 6\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $x^3-x=6$, $y\left(3x^2-1\right)=11$

$\Rightarrow$ $x=2$, $y=1$ $\Rightarrow$ $X=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XI-a

BAREM

Problema 3.

a) Fie a, b, c numere reale strict pozitive și funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+\sqrt{bx^2+cx+1}$.

Determinați a, b, c știind că $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=4$ și $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\frac{1}{4}$.

b) Determinați ecuațiile asimptotelor la graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+\sqrt{4x^2+x+1}$.

<u>**Soluție**</u>:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a+\sqrt{b} \Rightarrow a+\sqrt{b}=4$ 1p

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(ax+\sqrt{bx^2+cx+1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{bx^2-cx+1}-ax\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ limită finită $\Leftrightarrow \sqrt{b}=a \Rightarrow a=2,\ b=4$ 1p

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(ax+\sqrt{bx^2+cx+1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-cx+1}-2x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-cx+1}{\sqrt{4x^2-cx+1}+2x}=-\frac{1}{4} \Rightarrow c=1$ 1p

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+\sqrt{4x^2+x+1}$ este continuă pe $\mathbb{R}$, $\Rightarrow$ nu are asimptote verticale 1p

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=4$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-4x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+1}-2x\right)=\frac{1}{4} \Rightarrow y=4x+\frac{1}{4}$ asimptotă la $+\infty$ 2p

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt{4x^2+x+1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-x+1}-2x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x+1}{\sqrt{4x^2-x+1}+2x}=-\frac{1}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow y=-\frac{1}{4}$ asimptotă la $-\infty$ 1p

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "*ADOLF HAIMOVICI*"

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XI-a

BAREM

Problema 4.

Funcția $f:[0;12]\to\mathbb{R}$, $f(t)=\begin{cases}\dfrac{3t^2-10t+a}{t^2-2t-3}, & t\in[0;\,3)\\ b-\log_2(t-2), & t\in[3;\,12]\end{cases}$, determină temperatura unui corp, măsurată pe timp de 12 ore.

a) Știind că la momentul $t=1$ temperatura corpului este de 1^0 iar la momentul $t=2$ este de 2^0, aflați temperatura corpului la momentul $t=10$.

b) Determinați $a, b\in\mathbb{R}$ în cazul în care f are limită în $t=3$.

c) În cazul $a=3$ și $b=2$ arătați că f este continuă pe $[0;12]$ și determinați intervalele pe care $f(t)>0$.

<u>**Soluție**</u>:

a) $f(1)=1,\ f(3)=2\ \Rightarrow\ a=3,\ b=2$ 1p

$f(10)=-1$ 1p

b) $l_s=\lim\limits_{\substack{t\to3\\t<3}}\dfrac{3t^2-10t+a}{t^2-2t-3}=-\infty\cdot(a-3)$, $l_d=b$, $l_s=l_d\ \Rightarrow\ a=3$ 2p

pentru $a=3\ \Rightarrow\ l_s=\lim\limits_{\substack{t\to3\\t<3}}\dfrac{3t^2-10t+3}{t^2-2t-3}=\lim\limits_{\substack{t\to3\\t<3}}\dfrac{(t-3)(3t-1)}{(t-3)(t+1)}=2$, $l_d=b\ \Rightarrow\ b=2$ 1p

c) $f:[0;12]\to\mathbb{R}$, $f(t)=\begin{cases}\dfrac{3t^2-10t+3}{t^2-2t-3}, & t\in[0;\,3)\\ 2-\log_2(t-2), & t\in[3;\,12]\end{cases}$, este continuă pe $[0;\,12]\setminus\{3\}$

iar în $x=3$, având $l_s=l_d=f(3)\ \Rightarrow\ f$ continuă pe $[0;\,12]$ 1p

$f(t)=0\ \Rightarrow\ t=\dfrac{1}{3},\ t=6$

t	0		$\frac{1}{3}$		6		12
$f(t)$		− − − − − − −	0	+ + + + + + + +	0	− − − − − − − −	−

$\Rightarrow\ t\in\left(\dfrac{1}{3};\,6\right)$ 1p