



CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017



Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a X-a

BAREM

Problema 1.

Pe un cerc cu raza de $\frac{1}{2\pi}$ metri se deplasează doi melci, notați A și B , plecând în același moment, din același loc și în sensuri diferite. Se știe că în fiecare a n -a secundă de la începutul deplasării lor, melcul A parcurge $\frac{1}{2^n}$ metri în timp ce melcul B parcurge doar $\frac{1}{4^n}$ metri.

- Arătați că distanța parcursă de melcul A în primele n secunde este egală cu $\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ metri.
- Determinați după câte secunde distanța parcursă de melcul B este egală cu $\frac{3}{8}$ din distanța parcursă de melcul A .
- Aflați de câte ori se întâlnesc cei doi melci, considerând că după fiecare întâlnire ei își continuă deplasarea după aceleași reguli.

Soluție:

- Notăm $S_n(A)$ distanța parcursă de melcul A în n secunde, respectiv $S_n(B)$ distanța parcursă de melcul B în aceleași n secunde și obținem:

$$S_n(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} \dots\dots\dots 2p$$

$$b) S_n(B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^n}\right) \dots\dots\dots 1p$$

$$\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^n}\right) = \frac{3}{8} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \dots\dots\dots 1p$$

$$2^n = 8, n = 3 \dots\dots\dots 1p$$

- Cercul traiectoriei are lungimea de 1 metru și se observă $S_n(A) < 1$, $S_n(B) < 1$ 1p
deci nici unul din melci nu parcurge întreg cercul.

$$\text{Cum } S_2(A) + S_2(B) > 1, \text{ melcii se întâlnesc o singură dată} \dots\dots\dots 1p$$



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

**CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"**

**ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017**



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a X-a

BAREM

Problema 2.

- a) Demonstrați că $4 < 4 \log_7 10 < 5$.
- b) Calculați $[\log_3 256]$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real x .
- c) Comparați numerele $a = \log_7 10$ și $b = \log_3 4$.

Soluție:

- a) $4 < 4 \log_7 10 \Leftrightarrow \log_7 7 < \log_7 10$ (A) 1p
 $4 \log_7 10 < 5 \Leftrightarrow \log_7 10^4 < \log_7 7^5 \Leftrightarrow 10.000 < 16.807$ (A) 1p
- b) $3^5 < 256 < 3^6 \Rightarrow 5 < \log_3 256 < 6 \Rightarrow [\log_3 256] = 5$ 3p
- c) $4a = 4 \log_7 10 \in (4; 5)$ și $4b = \log_3 256 \in (5; 6) \Rightarrow a < b$ 2p



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a X-a

BAREM

Problema 3.

Considerăm $\varepsilon = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, cu $i^2 = -1$.

- Arătați că $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ și $\varepsilon^3 = 1$.
- Demonstrați că pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ are loc $x^2 + xy + y^2 = |x - \varepsilon y|^2$.
- Dacă $x, y, z \in \mathbb{R}$ și $a = x^2 y + y^2 z + z^2 x$, respectiv $b = xy^2 + yz^2 + zx^2$, calculați în funcție de a și b expresia $E = (x^3 - y^3)(y^3 - z^3)(z^3 - x^3)$

Soluție:

- Calcul direct sau folosind $\varepsilon + \bar{\varepsilon} = -1$ și $\varepsilon \cdot \bar{\varepsilon} = 1$
 $\Rightarrow \varepsilon$ și $\bar{\varepsilon}$ verifică ecuația $x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ 1p
 apoi $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0 \Rightarrow \varepsilon^3 + \varepsilon^2 + \varepsilon = 0 \Rightarrow \varepsilon^3 + \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 1 \Rightarrow \varepsilon^3 = 1$ 1p
- Calcul direct $|x - \varepsilon y|^2 = \left| \left(x + \frac{y}{2} \right) - \frac{y\sqrt{3}}{2} \cdot i \right|^2 = \left(x + \frac{y}{2} \right)^2 + \frac{3y^2}{4} = x^2 + xy + y^2$
 sau $|x - \varepsilon y|^2 = (x - \varepsilon y) \cdot \overline{(x - \varepsilon y)} = (x - \varepsilon y) \cdot (x - \bar{\varepsilon} y) = x^2 + xy + y^2$ 2p
- $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ și analogele 1p
 $E = (x - y)(y - z)(z - x)(x^2 + xy + y^2)(y^2 + yz + z^2)(z^2 + zx + x^2) = A \cdot B$
 $A = (x - y)(y - z)(z - x) = b - a$ 1p
 $B = (x^2 + xy + y^2)(y^2 + yz + z^2)(z^2 + zx + x^2) = |(x - \varepsilon y)(y - \varepsilon z)(z - \varepsilon x)|^2 = |-\varepsilon(a - \varepsilon b)|^2 = a^2 + ab + b^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow E = (b - a)(a^2 + ab + b^2) = b^3 - a^3$ 1p



CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017



Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a X-a

BAREM

Problema 4.

Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2^x, & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ 3^x, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.

- Arătați că $\log_3 2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
- Arătați că $f(\log_3 2) \in \mathbb{Q}$.
- Demonstrați că ecuația $f(x) = 3$, $x \in \mathbb{R}$, nu are soluție.
- Demonstrați că funcția f nu este nici injectivă și nici surjectivă.

Soluție:

- Dacă $\log_3 2 = n \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2 = 3^n$ iar dacă $\log_3 2 = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} \Rightarrow 2^q = 3^p$ (număr par = număr impar!) 1p
- $f(\log_3 2) = 3^{\log_3 2} = 2$ 2p
- Dacă $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(x) = 3 \Leftrightarrow 2^x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\log_3 2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ contradicție 1p
Dacă $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow f(x) = 3 \Leftrightarrow 3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1 \in \mathbb{Q}$ contradicție 1p
- $f(1) = 2 = f(\log_3 2) \Rightarrow$ funcție neinjectivă 1p
 $f(x) \neq 3$, $(\forall) x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ funcție nesurjectivă 1p