INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEŢEANĂ
19 martie 2016
Profil Tehnic

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A IX-A

1. Se consideră funcţia $f : R \to R, f(x) = \left(a^2 - a + 1\right)x + 1,$ unde $a \in \mathbb{R}$.

a) Demonstraţi că $a^2 - a + 1 > 0, \forall a \in \mathbb{R}$

b) Demonstraţi că $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$.

c) Comparaţi numerele $f(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ şi $f\left(\sqrt{2} + 2\right)$.

2. Fie pătratul $ABCD$ de latura 4, în care $AC \cap BD = \{O\}$ şi M este mijlocul segmentului $[BO]$.

Considerăm punctul N astfel încât $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{DO}$.

a) Demonstraţi că $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DO} = 2 \cdot \overrightarrow{AM}$.

b) Determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DO}$, utilizând eventual formula medianei $m_a^2 = \dfrac{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}{4}$.

c) Demonstraţi că punctele A, M, N sunt puncte coliniare.

3. Fie $\left(a_n\right)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică cu raţia $a_1 \neq 0$.

a) Demonstraţi că $a_1 + a_2 + ... + a_n = \dfrac{a_1 \cdot n\left(n+1\right)}{2}, \forall n \geq 1$.

b) Verificaţi relaţia $\dfrac{a_1}{a_1 + a_2 + ... + a_n} = 2\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right), \forall n \geq 1$.

c) Demonstraţi că $S = \dfrac{a_1}{a_1 + a_2} + \dfrac{a_1}{a_1 + a_2 + a_3} + ... + \dfrac{a_1}{a_1 + a_2 + ... + a_n} = \dfrac{2n}{n+1}, \forall n \geq 1$.

4. a) Demonstraţi că $1 + 3 + 5 + ... + \left(2n - 1\right) = n^2, \forall n \geq 1$

b) La un stadion cu capacitatea de 10000 de locuri vin spectatorii. În primul minut vine 1 spectator, în al doilea minut vin 3 spectatori, în al treilea minut vin 5 spectatori , etc. După câte minute stadionul se va umple ?

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016

Profil Tehnic

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A X-A

1. Rezolvați în mulțimea R ecuațiile :

a) $3^{\frac{1}{x}} - 3 = 2 \cdot 3^{\frac{1}{2x}}$,

b) $\log_3 x \cdot \log_{x+6} 9 = 1$.

2. Fie $z \in \mathbb{C}$ un număr complex astfel încât $z^2 + 2z + 4 = 0$.

a) Demonstrați că z^3 este număr real.

b) Calculați $z^{2016} + 2 \cdot z^{2015} + 2^2 \cdot z^{2014} + 2^3 \cdot z^{2013} + ... + 2^{2015} \cdot z + 2^{2016}$.

3. Trei elevi au intrat într-un magazin pentru a cumpăra câte ceva. Primul elev a cumpărat 4 sandviciuri, o cană de ceai şi 10 gogoşi, plătind în total 16,90 lei. Al doilea elev a cumpărat 3 sandviciuri, o cană de ceai şi 7 gogoşi, plătind 12,60 lei. Cât va plăti al treilea elev pentru un sandvici, o cană de ceai şi o gogoaşă ?

4. În toate pătrățelele 1×1 ale unei table de dimensiuni 3×4 sunt scrise numere astfel încât numerele din fiecare linie şi fiecare coloană formează câte o progresie aritmetică. Ştiind că suma celor patru numere din colțurile tablei este 672, să se determine suma numerelor de pe tablă.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016
Profil Tehnic

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A XI-A

1. Fie $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ şi funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\det\left(A\cdot A^T-x\cdot I_2\right)$, unde A^T - reprezintă transpusa matricei A.

a) Demonstrați că $f(0)\geq 0$.

b) Găsiți $a,b,c\in\mathbb{R}$ dacă $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f(-n)+f(-n+1)+...+f(n-1)+f(n)-2n-1}{n^3}\right)$

2. O matrice de ordinul al doilea, având elementele din mulțimea $\{0,1,2\}$, se numeşte ***echilibrată*** dacă oricare două elemente aflate pe aceeaşi linie şi aceeaşi coloană sunt numere consecutive. De exemplu $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ este matrice ***echilibrată.***

a) Justificați că matricea I_2 este matrice ***echilibrată.***

b) Câte matrice ***echilibrate*** se pot construi ?

c) Justificați că transpusa oricărei matrice echilibrate este tot o matrice ***echilibrată***.

3. a) Fie $f:D\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{mx^2+nx+p}{x+q}, m,n,p,q\in\mathbb{R}, D\subset\mathbb{R}.$

Să se determine $m,n,p,q\in\mathbb{R}$ astfel încât graficul funcției *f* să admită asimptotele $x=2$ şi $y=3x-1$, iar $A(1,3)$ să fie punct al graficului.

b) Considerăm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, cu proprietatea că $\left|f(x)-\sin^3 2x\right|\leq x^4$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

Calculați $\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{f(x)}{x^3}$.

4. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$.

a) Demonstrați că $A^4=B^3$.

b) Determinați matricea $X\in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât să avem $AX+XB=I_2$.

c) Verificați egalitatea $AB+C+I_2=O_2$, unde $C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ şi apoi demonstrați că $(AB)^n\neq I_2,\ (\forall)n\geq 1$

<u>Notă:</u> *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016
Profil Tehnic

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A XII-A

1. Fie (G,·) un grup multiplicativ cu elementul neutru e. Demonstrați că :

a) $(a^{-1}ba)^3 = a^{-1}b^3a$, oricare ar fi $a,b \in G$.

b) Dacă $a,b \in G$ astfel încât $a^{-2}ba^2 = e$ şi $a\ ba^{-2} = b^3$, atunci $a = b = e$.

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(\cos^2 x + 2016) + 1$. Se cere:

a) Arătați că $f(x) - f'(x) = e^x \sin 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Calculați $I = \int \frac{\sin 2x + e^{-x}}{e^{-x} + \cos^2 x + 2016} dx$.

3. Fie matricele $X = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ din $M_2(\mathbb{R})$ şi

mulțimea $G = \left\{ M(r) \mid M(r) = I_2 + rX, r \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\} \right\}$

a) Calculați X^2, X^3.

b) Arătați că $M(r) \cdot M(s) \in G$, pentru orice $M(r), M(s) \in G$.

c) Arătați că (G,·) este grup comutativ.

d) Rezolvați ecuația $(M(r))^3 = I_2 + 13X$, unde $M(r) \in G$.

4. Se consideră integrala nedefinită $I(x,n) = \int \frac{2x+3}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3) + n} dx$,

unde $x \in (0, +\infty)$ şi $n \in \mathbb{N}$.

a) Calculați $I(x,0)$.

b) Calculați $I(x,1)$.

c) Calculați $I(x,n)$, pentru $n \geq 2$.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*