

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016
Profil Tehnic

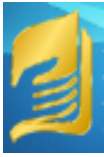


FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A IX-A

- Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (a^2 - a + 1)x + 1$, unde $a \in \mathbb{R}$.
 - Demonstrați că $a^2 - a + 1 > 0, \forall a \in \mathbb{R}$
 - Demonstrați că $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$.
 - Comparați numerele $f(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ și $f(\sqrt{2} + 2)$.
- Fie pătratul $ABCD$ de latura 4, în care $AC \cap BD = \{O\}$ și M este mijlocul segmentului $[BO]$. Considerăm punctul N astfel încât $\overline{CN} = \overline{DO}$.
 - Demonstrați că $\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{DO} = 2 \cdot \overline{AM}$.
 - Determinați lungimea vectorului $\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{DO}$, utilizând eventual formula medianei $m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$.
 - Demonstrați că punctele A, M, N sunt puncte coliniare.
- Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică cu rația $a_1 \neq 0$.
 - Demonstrați că $a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{a_1 \cdot n(n+1)}{2}, \forall n \geq 1$.
 - Verificați relația $\frac{a_1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} = 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right), \forall n \geq 1$.
 - Demonstrați că $S = \frac{a_1}{a_1 + a_2} + \frac{a_1}{a_1 + a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} = \frac{2n}{n+1}, \forall n \geq 1$.
- Demonstrați că $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2, \forall n \geq 1$
 - La un stadion cu capacitatea de 10000 de locuri vin spectatorii. În primul minut vine 1 spectator, în al doilea minut vin 3 spectatori, în al treilea minut vin 5 spectatori, etc. După câte minute stadionul se va umple?

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016
Profil Tehnic



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A X-A

1. Rezolvați în mulțimea \mathbb{R} ecuațiile :

a) $3^{\frac{1}{x}} - 3 = 2 \cdot 3^{\frac{1}{2x}}$,

b) $\log_3 x \cdot \log_{x+6} 9 = 1$.

2. Fie $z \in \mathbb{C}$ un număr complex astfel încât $z^2 + 2z + 4 = 0$.

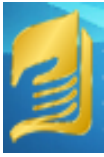
a) Demonstrați că z^3 este număr real.

b) Calculați $z^{2016} + 2 \cdot z^{2015} + 2^2 \cdot z^{2014} + 2^3 \cdot z^{2013} + \dots + 2^{2015} \cdot z + 2^{2016}$.

3. Trei elevi au intrat într-un magazin pentru a cumpăra câte ceva. Primul elev a cumpărat 4 sandviciuri, o cană de ceai și 10 gogoși, plătind în total 16,90 lei. Al doilea elev a cumpărat 3 sandviciuri, o cană de ceai și 7 gogoși, plătind 12,60 lei. Cât va plăti al treilea elev pentru un sandvici, o cană de ceai și o gogoasă ?

4. În toate pătrățelele 1×1 ale unei table de dimensiuni 3×4 sunt scrise numere astfel încât numerele din fiecare linie și fiecare coloană formează câte o progresie aritmetică. Știind că suma celor patru numere din colțurile tablei este 672, să se determine suma numerelor de pe tablă.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016
Profil Tehnic

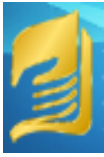


FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A XI-A

1. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ și funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \det(A \cdot A^T - x \cdot I_2)$, unde A^T - reprezintă transpusa matricei A .
- a) Demonstrați că $f(0) \geq 0$.
- b) Găsiți $a, b, c \in \mathbb{R}$ dacă $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.
- c) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f(-n) + f(-n+1) + \dots + f(n-1) + f(n) - 2n - 1}{n^3} \right)$
2. O matrice de ordinul al doilea, având elementele din mulțimea $\{0, 1, 2\}$, se numește *echilibrată* dacă oricare două elemente aflate pe aceeași linie și aceeași coloană sunt numere consecutive. De exemplu $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ este matrice *echilibrată*.
- a) Justificați că matricea I_2 este matrice *echilibrată*.
- b) Câte matrice *echilibrate* se pot construi ?
- c) Justificați că transpusa oricărei matrice echilibrate este tot o matrice *echilibrată*.
3. a) Fie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{mx^2 + nx + p}{x + q}$, $m, n, p, q \in \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$.
Să se determine $m, n, p, q \in \mathbb{R}$ astfel încât graficul funcției f să admită asimptotele $x = 2$ și $y = 3x - 1$, iar $A(1, 3)$ să fie punct al graficului.
- b) Considerăm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu proprietatea că $|f(x) - \sin^3 2x| \leq x^4$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
Calculați $\lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x)}{x^3}$.
4. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.
- a) Demonstrați că $A^4 = B^3$.
- b) Determinați matricea $X \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât să avem $AX + XB = I_2$.
- c) Verificați egalitatea $AB + C + I_2 = O_2$, unde $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și apoi demonstrați că $(AB)^n \neq I_2$, $(\forall) n \geq 1$

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016
Profil Tehnic



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A XII-A

1. Fie (G, \cdot) un grup multiplicativ cu elementul neutru e . Demonstrați că :
 - a) $(a^{-1}ba)^3 = a^{-1}b^3a$, oricare ar fi $a, b \in G$.
 - b) Dacă $a, b \in G$ astfel încât $a^{-2}ba^2 = e$ și $a ba^{-2} = b^3$, atunci $a = b = e$.
2. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(\cos^2 x + 2016) + 1$. Se cere:
 - a) Arătați că $f(x) - f'(x) = e^x \sin 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.
 - b) Calculați $I = \int \frac{\sin 2x + e^{-x}}{e^{-x} + \cos^2 x + 2016} dx$.
3. Fie matricele $X = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ din $M_2(\mathbb{R})$ și mulțimea $G = \left\{ M(r) \mid M(r) = I_2 + rX, r \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\} \right\}$
 - a) Calculați X^2, X^3 .
 - b) Arătați că $M(r) \cdot M(s) \in G$, pentru orice $M(r), M(s) \in G$.
 - c) Arătați că (G, \cdot) este grup comutativ.
 - d) Rezolvați ecuația $(M(r))^3 = I_2 + 13X$, unde $M(r) \in G$.
4. Se consideră integrala nedefinită $I(x, n) = \int \frac{2x+3}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3) + n} dx$, unde $x \in (0, +\infty)$ și $n \in \mathbb{N}$.
 - a) Calculați $I(x, 0)$.
 - b) Calculați $I(x, 1)$.
 - c) Calculați $I(x, n)$, pentru $n \geq 2$.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.