INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA A IX-A

1. La un concurs Adolf Haimovici, organizatorii au oferit drept premiu primilor 5 elevi clasați la clasa a IX-a un total de 17 cărți, fiecare elev primind cel puțin o carte.
a) Stabiliți dacă, în mod necesar, cel puțin doi elevi primesc mai mult de câte o carte.
b) Arătați că cel puțin un elev primeşte mai mult de 3 cărți.
c) Determinați în câte moduri se pot distribui premiile, astfel încât fiecare premiant să primească alt număr de cărți.

2. Fie M mulțimea tuturor progresiilor aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ cu toți termenii numere naturale.
a) Considerând progresia $(a_n)_{n\geq 1} \in M$ care are $a_1 = 6$ și $r = 10$, verificați dacă 2016 este sau nu termen al acestei progresii.
b) Determinați câte din progresiile $(a_n)_{n\geq 1} \in M$ care au $r = 10$, au printre termenii lor numărul 2016.
c) Determinați câte din progresiile $(a_n)_{n\geq 1} \in M$ care au $a_1 = 6$, au printre termenii lor numărul 2016.

3. Fie triunghiul ABC, M mijlocum laturii (BC) și punctele P, Q, R astfel încât $\overrightarrow{AP} = x \cdot \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ} = y \cdot \overrightarrow{AM}$ și $\overrightarrow{AR} = z \cdot \overrightarrow{AC}$, cu $x,\ y, z \in (0; +\infty)$. Arătați că:
a) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$
b) $\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{y}{2} - x\right) \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{y}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$
c) Punctele $P,\ Q,\ R$ sunt coliniare dacă și numai dacă $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{2}{y}$

4. Un turist parcurge un traseu $ABCD$ format din trei drumuri, AB, BC și CD, toate de aceeași lungime egală cu 60 km. Turistul merge pe drumurile specificate cu vitezele v_1, v_2, respectiv v_3, măsurate în km/h.
a) Dacă $v_1 = 30$, $v_2 = 20$ și $v_3 = 50$, determinați durata t_1 a parcurgerii întregului traseu, măsurată în ore și minute.
b) Dacă turistul ar parcurge întregul traseu cu viteza medie $v = \frac{v_1 + v_2 + v_3}{3}$ a celor trei viteze de la punctul anterior, determinați durata t_2 a parcurgerii întregului traseu, măsurată în ore și minute.
c) Arătați că, oricare ar fi vitezele v_1, v_2, respectiv v_3, are loc inegalitatea $t_1 \geq t_2$.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
19 martie 2016

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecţia mediului

CLASA A X-A

1. Rezolvaţi, în mulţimea numerelor reale, ecuaţiile:

a) $5^{2x+1}=4\cdot 5^{x}+1$

b) $x^2+2\sqrt{x^2-3x-4}=3x+4$

c) $\log_4(3x-2)\cdot\log_x 2=1$

2. Venitul lunar al unui tehnoredactor este format din salariul de bază de 800 lei la care se adaugă un spor astfel: dacă reuşeşte să tehnoredacteze până la 200 pagini i se dă un comision de 2 lei pentru fiecare pagină scrisă iar pentru fiecare pagină ce depăşeşte 200 primeşte 3 lei pentru fiecare pagină.

a) Determinaţi câţi bani primeşte tehnoredactorul dacă într-o lună scrie 150 pagini. Dar dacă scrie 250 pagini?

b) Arătaţi că funcţia pe baza căreia se calculează venitul lunar al tehnoredactorului este $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $f(n)=\begin{cases}2n+800, & \text{dacă } n\le 200\\ 3n+600, & \text{dacă } n>200\end{cases}$,

unde n este numărul de pagini scrise de tehnoredactor.

c) Determinaţi câte pagini trebuie să scrie tehnoredactorul pentru a câştiga într-o lună 1620 lei.

3. Considerăm numerele complexe $z_a=\dfrac{1-a\cdot i}{1+a\cdot i}$, $a\in\mathbb{R}$, $i^2=-1$.

a) Determinaţi modulul şi forma algebrică a numărului z_a

b) Determinaţi $a\in\mathbb{R}$ pentru care $z_a=\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}\cdot i$

c) Arătaţi că $\left(z_{\sqrt{3}}\right)^{2016}$ este număr real.

4. a) Arătaţi că $3\left(x^2+y^2+z^2\right)\ge(x+y+z)^2$, oricare ar fi $x,y,z\in\mathbb{R}$.

b) Demonstraţi că $3^{2n}>3n+99$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 3$.

c) Determinaţi numerele naturale n,a,b şi c, ştiind că $a+b+c=3^n$ şi $a^2+b^2+c^2=33+n$.

.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA A XI-A

1. Fie matricele $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}1 & b\\ c & 1\end{pmatrix}$, $a,b,c\in\mathbb{R}$. Se cere:

a) Arătați că $A^n=n\cdot A-(n-1)\cdot I_2$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

b) Demonstrați că nu există $X\in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A^3\cdot X-X\cdot A^3=B$.

c) Arătați că egalitatea $(A+B)^2=A^2+2\cdot A\cdot B+B^2$ este adevărată dacă și numai dacă $a\cdot c=0$.

2. Fie funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3+x+1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=3e^x-2x+1$. Se cere:

a) Arătați că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=1$;

b) Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(0)\cdot g(x)-g(0)f(x)}{x}$

c) Determinați numerele $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care limita $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\cdot g(x+1)+b\cdot f(x)}{x}$ există și este egală cu 2.

3. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}a & a+1 & a+2\\ b & b+1 & b+2\\ 1 & 2 & c\end{pmatrix}$, cu $a,b,c\in\mathbb{R}$. Se cere:

a) Arătați că $\det A=(a-b)(c-3)$.

b) Demonstrați că pentru $a=3,\ b=2,\ c=4$, matricea A este inversabilă și inversa A^{-1} are toate elementele numere întregi.

c) Determinați o matrice $C\in M_3(\mathbb{Z})$, inversabilă și astfel încât să aibă inversa C^{-1} cu toate elementele numere naturale.

4. O sursă de căldură încălzește uniform un corp. Experimental, constatăm că temperatura corpului este dată de legea $T(t)=a\cdot t^b+c-\sqrt{t^2+d\cdot t+25}$, cu $a,b,c,d>0$, unde numărul $t\geq 0$ reprezintă momentul măsurării, exprimat în minute, iar numărul $T(t)$ reprezintă temperatura corpului, exprimată în grade Celsius, la fiecare moment $t\geq 0$ ales. Se știe că la momentul inițial $t=0$ temperatura corpului este de 7 grade Celsius iar atunci când $t\to\infty$, temperatura corpului se apropie infinitezimal de 10 grade Celsius, adică $\lim\limits_{t\to\infty}T(t)=10$.

__Notă:__ Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

a) Arătați că $c=12$.

b) Demonstrați că $\lim\limits_{t\to\infty} T(t) = +\infty\cdot\operatorname{sgn}(b-1)$, unde $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, & \text{dacă } x>0 \\ -1, & \text{dacă } x<0 \end{cases}$.

c) Arătați că $T(t) = t+12-\sqrt{t^2+4t+25}$.

d) Determinați la ce moment t temperatura corpului va fi de 9 grade Celsius.

e) Demonstrați că, la orice moment $t\ge 0$, temperatura corpului este strict mai mică de 10 grade Celsius.

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA A XII-A

1. Fie funcția $f:[0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(1+x)$. Se cere:

a) Determinați primitiva $F:[0;+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției f, știind că $F(0)=0$.

b) Calculați $\int_0^{e-1} f(x)\,dx$.

c) Dacă $g:[0;+\infty)\to\mathbb{R}$ este o funcție derivabilă încât pentru orice $x\geq 0$ se verifică egalitatea $x+\int_0^x g(t)\,dt=(x+1)\cdot g(x)$, arătați că $g=f$.

2. Definim pe mulțimea numerelor reale legea de compoziție $x\circ y=xy+2x+2y$. Se cere:

a) Arătați că legea ”$\circ$” nu este asociativă.

b) Cercetați dacă structura algebrică $(\mathbb{R};\circ)$ admite element neutru.

c) Găsiți două numere $a,\ b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ astfel încât $a\circ b\in\mathbb{N}$.

d) Demonstrați că pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n^3\circ n\neq 2016$.

3. În cadrul unui experiment, o sursă de căldură încălzește un corp astfel încât temperatura corpului, notată $t(x)$ și măsurată în grade Celsius, se modifică la fiecare moment $x\in[0;+\infty)$ al măsurării, exprimat în minute, prin funcția

$$t:[0;+\infty)\to\mathbb{R},\ t(x)=\begin{cases}x^2+x+2, & \text{dacă } x\in[0;3]\\ 5x-1, & \text{dacă } x\in(3;6)\\ 29, & \text{dacă } x\in[6;+\infty)\end{cases}$$

a) Arătați că funcția $t:[0;+\infty)\to\mathbb{R}$ admite primitive și este integrabilă pe orice $[a;b]\subset[0;+\infty)$.

b) Știind că $M(a;b)=\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\,dx$ exprimă valoarea medie a unei funcții f care este integrabilă pe un interval $[a;b]\subset\mathbb{R}$, calculați temperatura medie înregistrată prin acest experiment pe intervalul momentelor $a=4$ și $b=8$.

c) Determinați după câte minute de la momentul inițial $x_0=0$, temperatura medie înregistrată atinge valoarea de 20 grade Celsius.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

4. Fie mulțimea $M = \{a^2 - ab + b^2 \,/\, a, b \in \mathbb{Z}\}$ și numărul complex $\varepsilon = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, $i^2 = -1$.

a) Arătați că $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ și $\varepsilon^3 = 1$

b) Arătați că, pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}$, se verifică egalitatea $a^2 - ab + b^2 = (a + \varepsilon \cdot b)(a + \overline{\varepsilon} \cdot b)$,

unde $\overline{\varepsilon} = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ este conjugatul numărului complex $\varepsilon = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

c) Demonstrați egalitatea $(a_1^2 - a_1b_1 + b_1^2) \cdot (a_2^2 - a_2b_2 + b_2^2) = \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2$,

unde $\alpha = a_1a_2 - b_1b_2$, $\beta = a_1b_2 + a_2b_1 - b_1b_2$ și $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$.

d) Găsiți două numere $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ astfel încât $(2016^2 - 2016 \cdot 2015 + 2015^2)^2 = \alpha^2 - \alpha \cdot \beta + \beta^2$.