

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016



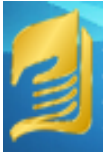
FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA A IX-A

1. La un concurs Adolf Haimovici, organizatorii au oferit drept premiu primilor 5 elevi clasai la clasa a IX-a un total de 17 cărți, fiecare elev primind cel puțin o carte.
 - a) Stabiliți dacă, în mod necesar, cel puțin doi elevi primesc mai mult de câte o carte.
 - b) Arătați că cel puțin un elev primește mai mult de 3 cărți.
 - c) Determinați în câte moduri se pot distribui premiile, astfel încât fiecare premiant să primească alt număr de cărți.
2. Fie M mulțimea tuturor progresiilor aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$ cu toți termenii numere naturale.
 - a) Considerând progresia $(a_n)_{n \geq 1} \in M$ care are $a_1 = 6$ și $r = 10$, verificați dacă 2016 este sau nu termen al acestei progresii.
 - b) Determinați câte din progresiile $(a_n)_{n \geq 1} \in M$ care au $r = 10$, au printre termenii lor numărul 2016.
 - c) Determinați câte din progresiile $(a_n)_{n \geq 1} \in M$ care au $a_1 = 6$, au printre termenii lor numărul 2016.
3. Fie triunghiul ABC , M mijlocul laturii (BC) și punctele P, Q, R astfel încât $\overline{AP} = x \cdot \overline{AB}$, $\overline{AQ} = y \cdot \overline{AM}$ și $\overline{AR} = z \cdot \overline{AC}$, cu $x, y, z \in (0; +\infty)$. Arătați că:
 - a) $\overline{AM} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})$
 - b) $\overline{PQ} = \left(\frac{y}{2} - x\right) \cdot \overline{AB} + \frac{y}{2} \cdot \overline{AC}$
 - c) Punctele P, Q, R sunt coliniare dacă și numai dacă $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{2}{y}$
4. Un turist parcurge un traseu $ABCD$ format din trei drumuri, AB , BC și CD , toate de aceeași lungime egală cu 60 km. Turistul merge pe drumurile specificate cu vitezele v_1, v_2 , respectiv v_3 , măsurate în km/h .
 - a) Dacă $v_1 = 30$, $v_2 = 20$ și $v_3 = 50$, determinați durata t_1 a parcurgerii întregului traseu, măsurată în ore și minute.
 - b) Dacă turistul ar parcurge întregul traseu cu viteza medie $v = \frac{v_1 + v_2 + v_3}{3}$ a celor trei viteze de la punctul anterior, determinați durata t_2 a parcurgerii întregului traseu, măsurată în ore și minute.
 - c) Arătați că, oricare ar fi vitezele v_1, v_2 , respectiv v_3 , are loc inegalitatea $t_1 \geq t_2$.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA A X-A

1. Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuațiile:

a) $5^{2x+1} = 4 \cdot 5^x + 1$

b) $x^2 + 2\sqrt{x^2 - 3x - 4} = 3x + 4$

c) $\log_4(3x - 2) \cdot \log_x 2 = 1$

2. Venitul lunar al unui tehnoredactor este format din salariul de bază de 800 lei la care se adaugă un spor astfel: dacă reușește să tehnoredacteze până la 200 pagini i se dă un comision de 2 lei pentru fiecare pagină scrisă iar pentru fiecare pagină ce depășește 200 primește 3 lei pentru fiecare pagină.

a) Determinați câți bani primește tehnoredactorul dacă într-o lună scrie 150 pagini. Dar dacă scrie 250 pagini?

b) Arătați că funcția pe baza căreia se calculează venitul lunar al tehnoredactorului este

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = \begin{cases} 2n + 800, & \text{dacă } n \leq 200 \\ 3n + 600, & \text{dacă } n > 200 \end{cases}$$

unde n este numărul de pagini scrise de tehnoredactor.

c) Determinați câte pagini trebuie să scrie tehnoredactorul pentru a câștiga într-o lună 1620 lei.

3. Considerăm numerele complexe $z_a = \frac{1 - a \cdot i}{1 + a \cdot i}$, $a \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$.

a) Determinați modulul și forma algebrică a numărului z_a

b) Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care $z_a = \frac{3}{5} - \frac{4}{5} \cdot i$

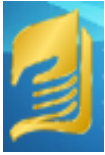
c) Arătați că $(z_{\sqrt{3}})^{2016}$ este număr real.

4. a) Arătați că $3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^2$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$.

b) Demonstrați că $3^{2n} > 3n + 99$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

c) Determinați numerele naturale n, a, b și c , știind că $a + b + c = 3^n$ și $a^2 + b^2 + c^2 = 33 + n$.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016



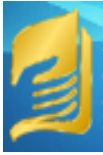
FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA A XI-A

1. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ c & 1 \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Se cere:
 - a) Arătați că $A^n = n \cdot A - (n-1) \cdot I_2$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
 - b) Demonstrați că nu există $X \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A^3 \cdot X - X \cdot A^3 = B$.
 - c) Arătați că egalitatea $(A+B)^2 = A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2$ este adevărată dacă și numai dacă $a \cdot c = 0$.
2. Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 + x + 1$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 3e^x - 2x + 1$. Se cere:
 - a) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = 1$;
 - b) Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(0) \cdot g(x) - g(0) \cdot f(x)}{x}$
 - c) Determinați numerele $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care limita $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cdot g(x+1) + b \cdot f(x)}{x}$ există și este egală cu 2.
3. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 1 & 2 & c \end{pmatrix}$, cu $a, b, c \in \mathbb{R}$. Se cere:
 - a) Arătați că $\det A = (a-b)(c-3)$.
 - b) Demonstrați că pentru $a=3, b=2, c=4$, matricea A este inversabilă și inversa A^{-1} are toate elementele numere întregi.
 - c) Determinați o matrice $C \in M_3(\mathbb{Z})$, inversabilă și astfel încât să aibă inversa C^{-1} cu toate elementele numere naturale.
4. O sursă de căldură încălzește uniform un corp. Experimental, constatăm că temperatura corpului este dată de legea $T(t) = a \cdot t^b + c - \sqrt{t^2 + d \cdot t + 25}$, cu $a, b, c, d > 0$, unde numărul $t \geq 0$ reprezintă momentul măsurării, exprimat în minute, iar numărul $T(t)$ reprezintă temperatura corpului, exprimată în grade Celsius, la fiecare moment $t \geq 0$ ales. Se știe că la momentul inițial $t=0$ temperatura corpului este de 7 grade Celsius iar atunci când $t \rightarrow \infty$, temperatura corpului se apropie infinitesimal de 10 grade Celsius, adică $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = 10$.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

a) Arătați că $c = 12$.

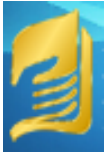
b) Demonstrați că $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = +\infty \cdot \operatorname{sgn}(b-1)$, unde $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, & \text{dacă } x > 0 \\ -1, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$.

c) Arătați că $T(t) = t + 12 - \sqrt{t^2 + 4t + 25}$.

d) Determinați la ce moment t temperatura corpului va fi de 9 grade Celsius.

e) Demonstrați că, la orice moment $t \geq 0$, temperatura corpului este strict mai mică de 10 grade Celsius.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016



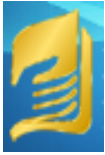
FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA A XII-A

1. Fie funcția $f : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+x)$. Se cere:
 - a) Determinați primitiva $F : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției f , știind că $F(0) = 0$.
 - b) Calculați $\int_0^{e-1} f(x) dx$.
 - c) Dacă $g : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă încât pentru orice $x \geq 0$ se verifică egalitatea $x + \int_0^x g(t) dt = (x+1) \cdot g(x)$, arătați că $g = f$.
2. Definim pe mulțimea numerelor reale legea de compoziție $x \circ y = xy + 2x + 2y$. Se cere:
 - a) Arătați că legea " \circ " nu este asociativă.
 - b) Cercetați dacă structura algebrică $(\mathbb{R}; \circ)$ admite element neutru.
 - c) Găsiți două numere $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ astfel încât $a \circ b \in \mathbb{N}$.
 - d) Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n^3 \circ n \neq 2016$.
3. În cadrul unui experiment, o sursă de căldură încălzește un corp astfel încât temperatura corpului, notată $t(x)$ și măsurată în grade Celsius, se modifică la fiecare moment $x \in [0; +\infty)$ al măsurării, exprimat în minute, prin funcția
$$t : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, t(x) = \begin{cases} x^2 + x + 2, & \text{dacă } x \in [0; 3] \\ 5x - 1, & \text{dacă } x \in (3; 6) \\ 29, & \text{dacă } x \in [6; +\infty) \end{cases}$$
 - a) Arătați că funcția $t : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ admite primitive și este integrabilă pe orice $[a; b] \subset [0; +\infty)$.
 - b) Știind că $M(a; b) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx$ exprimă valoarea medie a unei funcții f care este integrabilă pe un interval $[a; b] \subset \mathbb{R}$, calculați temperatura medie înregistrată prin acest experiment pe intervalul momentelor $a = 4$ și $b = 8$.
 - c) Determinați după câte minute de la momentul inițial $x_0 = 0$, temperatura medie înregistrată atinge valoarea de 20 grade Celsius.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

4. Fie mulțimea $M = \{a^2 - ab + b^2 \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ și numărul complex $\varepsilon = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $i^2 = -1$.
- a) Arătați că $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ și $\varepsilon^3 = 1$
- b) Arătați că, pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}$, se verifică egalitatea $a^2 - ab + b^2 = (a + \varepsilon \cdot b)(a + \bar{\varepsilon} \cdot b)$,
unde $\bar{\varepsilon} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ este conjugatul numărului complex $\varepsilon = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.
- c) Demonstrați egalitatea $(a_1^2 - a_1b_1 + b_1^2) \cdot (a_2^2 - a_2b_2 + b_2^2) = \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2$,
unde $\alpha = a_1a_2 - b_1b_2$, $\beta = a_1b_2 + a_2b_1 - b_1b_2$ și $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$.
- d) Găsiți două numere $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ astfel încât $(2016^2 - 2016 \cdot 2015 + 2015^2)^2 = \alpha^2 - \alpha \cdot \beta + \beta^2$.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.