

INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ  
19 martie 2016



FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil filologie / științe sociale

## BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A IX-A

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + 1$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ .

a) Să se determine numerele  $a$  și  $b$  știind că funcția admite valoarea minimă  $-\frac{5}{4}$ , iar graficul funcției este simetric față de dreapta de ecuație  $x = \frac{3}{4}$ .

b) Aflați aria triunghiului determinat de intersecțiile graficului cu axele de coordonate.

**Soluție.**

a)  $-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{5}{4}$ ,  $-\frac{b}{2a} = \frac{3}{4}$  ..... 2 puncte

$9a^2 - 36a = 0$  ..... 1 punct

$a = 4, b = -6$  ..... 1 punct

b)  $G_f \cap (Ox): A(\frac{3-\sqrt{5}}{4}, 0), B(\frac{3+\sqrt{5}}{4}, 0); G_f \cap (Oy): C(0,1)$  ..... 2 puncte

$A_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot OC}{2} = \frac{\sqrt{5}}{4}$  ..... 1 punct

2. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}$ .

a) Calculați suma  $S_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

b) Determinați valorile numărului natural  $n$  pentru care  $[S_n] = 3$ , unde cu  $[S_n]$  s-a notat partea întreagă a numărului  $S_n$ .

**Soluție.**

a)  $S_n = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$  ..... 1 punct

$S_n = \sqrt{n+1} - 1$  ..... 2 puncte

b)  $[\sqrt{n+1} - 1] = 3 \Leftrightarrow 3 \leq \sqrt{n+1} - 1 < 4$  ..... 2 puncte

$15 \leq n < 24$  ..... 1 punct

$n \in \{15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23\}$  ..... 1 punct

3. Fie  $ABCD$  un paralelogram și punctele  $M, N, P, Q$  pe laturile  $[AB], [BC], [CD]$  și respectiv  $[DA]$  astfel încât  $\overline{AM} = a\overline{MB}, \overline{BN} = a\overline{NC}, \overline{CP} = a\overline{PD}, \overline{DQ} = a\overline{QA}, a > 0$ .
- a) Demonstrați că patrulaterul  $MNPQ$  este paralelogram.  
 b) Arătați că dreptele  $AC, BD, MP, NQ$  sunt concurente.

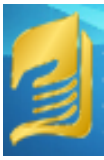
**Soluție.**

- a)  $\overline{AM} = a\overline{MB}, \overline{CP} = a\overline{PD}, \overline{AB} = \overline{DC} \Rightarrow \overline{AM} = \overline{PC}$  ..... 1 punct  
 $\overline{BN} = a\overline{NC}, \overline{DQ} = a\overline{QA}, \overline{AD} = \overline{BC} \Rightarrow \overline{QA} = \overline{CN}$  ..... 1 punct  
 $\overline{QM} = \overline{PN} \Rightarrow MNPQ$  este paralelogram..... 2 puncte  
 b)  $MBPD$  este paralelogram..... 1 punct  
 $BNDQ$  este paralelogram..... 1 punct  
 $[AC], [BD], [MP], [NQ]$  au același mijloc..... 1 punct

4. Coborând în interiorul pământului, la fiecare 30,5m temperatura crește cu  $1^\circ\text{C}$ . Dacă la suprafața Pământului temperatura este de  $10^\circ\text{C}$ , atunci:
- a) Ce temperatură va fi la adâncimea de 1098m ?  
 b) La ce adâncime temperatura atinge punctul de fierbere al apei ?

**Soluție.**

- a)  $T(n)$  = temperatura la  $n$  metri.  $T(n) = 10 + \frac{n}{30,5}$  ..... 2 puncte  
 $T(1098) = 10 + \frac{1098}{30,5}$  ..... 1 punct  
 $T(1098) = 46^\circ\text{C}$  ..... 1 punct  
 b)  $10 + \frac{n}{30,5} = 100$  ..... 2 puncte  
 $n = 2745\text{m}$  ..... 1 punct



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ  
19 martie 2016



FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil filologie / științe sociale

## BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A X-A

1. Determinați soluțiile reale ale ecuațiilor în necunoscuta  $x$  :

a)  $x^{\log_x \sqrt{x^2-4}} = \sqrt{5}$ ;      b)  $\frac{1}{3-\log_2 x} + \frac{1}{2+\log_2 x} = 1$ .

**Soluție.**

a)  $\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x \in [2, +\infty)$  ..... 1 punct

$\sqrt{x^2-4} = \sqrt{5}$  ..... 1 punct

$x = 3$  soluția ecuației ..... 1 punct

b)  $\begin{cases} x > 0 \\ 3 - \log_2 x \neq 0 \\ 2 + \log_2 x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (0, +\infty) \setminus \left\{ \frac{1}{4}, 8 \right\}$  ..... 1 punct

$\log_2 x = t$ ,  $\frac{1}{3-t} + \frac{1}{2+t} = 1 \Rightarrow t^2 - t - 1 = 0$  ..... 1 punct

$t_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \log_2 x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x_1 = 2^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$ ,  $x_1 \in (0, +\infty) \setminus \left\{ \frac{1}{4}, 8 \right\}$  ..... 1 punct

$t_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \log_2 x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x_2 = 2^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ ,  $x_2 \in (0, +\infty) \setminus \left\{ \frac{1}{4}, 8 \right\}$  ..... 1 punct

2. Se consideră funcția  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln x$ .

a) Să se arate că  $\ln\left(\frac{2+3}{2}\right) \geq \frac{\ln 2 + \ln 3}{2}$ .

b) Să se arate că  $\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{\ln a + \ln b}{2}$ ,  $\forall a, b \in (0, +\infty)$ .

**Soluție.**

a)  $\ln\left(\frac{2+3}{2}\right) \geq \frac{\ln 2 + \ln 3}{2} \Leftrightarrow \ln \frac{5}{2} \geq \frac{\ln 6}{2} \Leftrightarrow \ln \frac{25}{4} \geq \ln 6$  ..... 2 puncte

$\Leftrightarrow \frac{25}{4} \geq 6$  ..... 1 punct

b)  $\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{\ln(a \cdot b)}{2}$  ..... 1 punct

$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$  ..... 1 punct

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$(a-b)^2 \geq 0, \forall a, b \in (0, +\infty) \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

3. a) Să se arate că:  $(\sqrt{x-1}+1)^2 = x+2\sqrt{x-1}, \forall x \geq 1$  și  $(\sqrt{x-1}-1)^2 = x-2\sqrt{x-1}, \forall x \geq 1$ .

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:  $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 4$ .

**Soluție.**

$$(\sqrt{x-1}+1)^2 = x-1+2\sqrt{x-1}+1 = x+2\sqrt{x-1} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$(\sqrt{x-1}-1)^2 = x-1-2\sqrt{x-1}+1 = x-2\sqrt{x-1} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

b)  $(x-1)+1 \geq 2\sqrt{x-1}, \forall x \geq 1 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

$$\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} = 4 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$|\sqrt{x-1}+1| + |\sqrt{x-1}-1| = 4 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

Pentru  $x \geq 2, \sqrt{x-1}+1 + \sqrt{x-1}-1 = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 2 \Rightarrow x = 5 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

Pentru  $x \in [1, 2): \sqrt{x-1}+1 - \sqrt{x-1}+1 = 4 \Leftrightarrow 2 = 4, \text{ fals} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

4. Fie  $A, B, C$  trei orașe, astfel încât  $d(A, B) = d(B, C)$  (s-a notat  $d(x, y)$  distanța între orașul  $x$  și orașul  $y$ ). Două mașini pleacă din orașul  $A$  spre orașul  $C$ , trecând prin orașul  $B$ . Prima mașină parcurge distanța de la  $A$  la  $B$  cu viteza  $v$  km/h, apoi de la  $B$  la  $C$  merge de două ori mai repede. A doua mașină merge de  $A$  la  $B$  cu viteza medie de 48 km/h, apoi parcurge distanța de la  $B$  la  $C$  cu viteza  $(v+20)$  km/h. Cele două mașini parcurg distanța de la  $A$  la  $C$  în același timp. Calculați viteza  $v$ .

**Soluție.**

Notăm  $d(A, B) = d(B, C) = d$ .

Prima mașină parcurge distanța de la  $A$  la  $B$  cu viteza  $v$  în timpul  $t$ , iar de la  $B$  la  $C$  cu viteza  $2v$  în timpul  $\frac{t}{2} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

A doua mașină parcurge distanța de la  $A$  la  $B$  cu viteza 48 km/h în timpul  $t_1$ , iar de la  $B$  la  $C$  cu viteza  $(v+20)$  km/h în timpul  $t_2 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

$$\begin{cases} t = \frac{d}{v} \\ \frac{t}{2} = \frac{d}{2v} \end{cases} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$t_1 + t_2 = \frac{d}{48} + \frac{d}{v+20} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$t_1 + t_2 = \frac{3t}{2} = \frac{3d}{2v} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$\frac{d}{48} + \frac{d}{v+20} = \frac{3d}{2v} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$v^2 - 4v - 1440 = 0 \Rightarrow v = 40 \text{ km/h} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ  
19 martie 2016



FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil filologie / științe sociale

## BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A XI-A

1. După două scumpiri succesive cu același procent, prețul unui produs este același cu cel obținut în urma unei singure scumpiri cu 44%. Care este procentul scumpirilor succesive?

**Soluție.**

Dacă  $a$  este prețul inițial, după prima scumpire cu  $p\%$  prețul va fi  $a\left(1 + \frac{p}{100}\right)$  ..... 2 puncte

După a doua scumpire prețul va fi  $a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$  ..... 2 puncte

Prețul final este  $\frac{144}{100}a$  ..... 1 punct

$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 = \frac{144}{100}$  ..... 1 punct

$p = 20$  ..... 1 punct

2. Seria statistică prezentată în tabelul de mai jos redă frecvența relativă a mijloacelor de transport în comun, luând ca valori clasele ce reprezintă intervalele orare dintr-o zi lucrătoare.

Interval orar	[0;4)	[4;8)	[8;12)	[12;16)	[16;20)	[20;24)
Frecvența relativă	0,05	0,15	0,25	0,2	0,25	0,1

a) Calculați media seriei statistice și clasa mediană.

b) Într-o zi de week-end frecvența relativă a celei de a treia clase scade, iar frecvența penultimei clase crește cu atât cât a scăzut frecvența celei de a treia. Știind că media seriei statistice crește cu 0,4, determinați frecvențele relative ale celor două clase .

**Soluție.**

a) Media este  $m = 2 \cdot 0,05 + 6 \cdot 0,15 + 10 \cdot 0,25 + 14 \cdot 0,2 + 18 \cdot 0,25 + 22 \cdot 0,1 = 13$ ,

unde 2, 6, 10, 14, 18, 22, sunt valorile centrale ale claselor ..... 2 puncte

Șirul frecvențelor relative cumulate crescător este: 0,05; 0,2; 0,45; 0,65; 0,9, 1 ..... 1 punct

Clasa mediană este intervalul [12;16). ..... 1 punct

b) Dacă frecvența clasei a treia va fi  $0,25 - x$  iar a penultimei clase  $0,25 + x$ , media pentru o zi de week-end este  $2 \cdot 0,05 + 6 \cdot 0,15 + 10 \cdot (0,25 - x) + 14 \cdot 0,2 + 18 \cdot (0,25 + x) + 22 \cdot 0,1 = 13,4$ . .... 1 punct

$x = 0,05$  ..... 1 punct

Frecvențele relative ale celor două clase devin 0,2 și 0,3..... 1 punct

3. Se consideră graful neorientat  $G = (V, M)$  cu 5 vârfuri și

$$M = \{[1, 2], [1, 3], [1, 4], [2, 3], [2, 4], [2, 5], [3, 4], [3, 5], [4, 5]\}.$$

a) Arătați că graful  $G$  este conex.

b) Câte muchii mai trebuie adăugate pentru a obține un graf complet?

c) Câte muchii trebuie eliminate pentru a obține un graf arbore?

**Soluție.**

a) Graful este conex pentru că între oricare două vârfuri există cel puțin un drum ..... 2 puncte

b)  $C_5^2 = 10$ ,  $10 - 9 = 1$ , Trebuie adăugată muchia ( $[1, 5]$ ) ..... 2 puncte

c) Graful arbore este conex și fără cicluri ..... 2 puncte

Trebuie să eliminăm 5 muchii ..... 1 punct

4. Fiecare elev dintr-o clasă trimite câte o felicitare fiecărui prieten din aceeași clasă. Demonstrați că cel puțin doi elevi trimit același număr de felicitări.

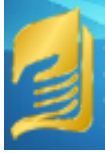
**Soluție.**

Asociem celor  $n$  elevi din clasă un graf cu  $n$  vârfuri, unde gradul fiecărui vârf este numărul de felicitări trimise ..... 1 punct

Presupunem prin reducere la absurd că gradele vârfurilor sunt  $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  ..... 2 puncte

Înseamnă că există un vârf cu gradul  $n-1$ , care va fi legat de toate celelalte  $n-1$  vârfuri .. 2 puncte

Contradicție cu faptul că există un nod cu gradul 0 ..... 2 puncte



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ  
19 martie 2016



FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil filologie / științe sociale

## BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A XII-A

1. Fie matricea  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

a) Calculați  $A^2$  și  $A^3$ .

b) Arătați că  $A^{2016} = 2016A - 2015I_2$ .

c) Rezolvați ecuația  $X^2 = A$ , unde  $X$  este o matrice pătratică de ordinul 2, cu elemente numere reale.

**Soluție.**

a)  $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  ..... 1 punct

b)  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & -2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}^*$  ..... 1 punct

$A^n + (n-1)I_2 = nA, \forall n \in \mathbb{N}^*$  ..... 1 punct

$A^{2016} + 2015I_2 = 2016A$  ..... 1 punct

c)  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, X^2 = A \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + bc = 1 \\ b(a+d) = -2 \\ c(a+d) = 0 \\ d^2 + bc = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b(a+d) = -2 \\ c = 0 \\ d^2 = 1 \end{cases}$  ..... 2 puncte

$X \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$  ..... 1 punct

2. Se consideră matricele  $A(x) = \begin{pmatrix} 1+2x & 0 & 4x \\ 0 & 1 & 0 \\ -x & 0 & 1-2x \end{pmatrix}, x$  număr real.

a) Calculați  $\det(A(x))$ .

b) Arătați că are loc egalitatea  $A(x) \cdot A(y) = A(x+y)$ , oricare ar fi  $x$  și  $y$  numere reale.

c) Calculați  $P = A\left(\frac{1}{1 \cdot 2}\right) \cdot A\left(\frac{1}{2 \cdot 3}\right) \cdot \dots \cdot A\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$ , unde  $n$  este număr natural nenul.

**Soluție.**

- a)  $\det(A(x)) = 1 - 4x^2 + 4x^2 = 1$ , pentru orice  $x$  număr real. .... 2 puncte  
 b) Verifică relația ..... 3 puncte  
 c)  $P = A\left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}\right) = A\left(\frac{n}{n+1}\right)$ , pentru orice  $n$  număr natural nenul ..... 2 puncte

**3.** În reperul cartezian  $(xOy)$  se consideră punctele  $A_n(n-1, 2n+1)$ ,  $n$  număr natural.

- a) Scrieți ecuația dreptei  $A_0A_1$ .  
 b) Arătați că punctele  $A_0, A_1, A_n$  sunt coliniare oricare ar fi numărul natural  $n, n \geq 2$ .  
 c) Determinați numărul natural  $n, n \geq 2$ , astfel încât aria triunghiului  $OA_1A_n$  să fie 3.

**Soluție.**

- a)  $A_0(-1,1), A_1(0,3)$  ..... 1 punct  
 Ecuația dreptei  $(A_0A_1)$  este:  $2x - y + 3 = 0$  ..... 2 puncte  
 b)  $A_n \in A_0A_1$  deoarece  $2(n-1) - (2n+1) + 3 = 0$ . ..... 2 puncte  
 c)  $\frac{1}{2} \cdot |-3(n-1)| = 3$  ..... 1 punct  
 $n = 3$  ..... 1 punct

**4.** În fiecare nod rezultat din intersecțiile celor 7 linii și 7 coloane ale unui tablou pătratic se află câte o albină. La un moment dat toate albinele zboară și fiecare se așează pe un nod vecin, de pe aceeași linie sau coloană cu cel de pe care a zburat.

Să se arate că există un nod pe care nu s-a așezat nicio albină.

**Soluție.**

Să considerăm nodurile tabloului colorate ca o tablă de șah, în alb și negru.

- Atunci 24 de noduri sunt albe și 25 de noduri sunt negre (sau invers) ..... 3 puncte  
 Observăm că o albină care pleacă de pe un nod negru ajunge pe unul alb, iar de pe un nod alb ajunge pe unul negru. Cum de pe nodurile albe au plecat 24 de albine, ele nu pot ocupa 25 de noduri negre(sau invers). ..... 4 puncte