INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiințele naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A IX-A

1. Dorin are o grădină care trebuie săpată. El îi tocmeşte pe Ion şi pe Vasile, doi muncitori la fel de harnici. Ion munceşte 9 ore, iar Vasile 15 ore. Pentru munca sa, Vasile primeşte cu 90 lei mai mult decât Ion.

a) Ce sumă primeşte fiecare dintre cei doi muncitori?

b) Suprafața săpată de Ion în 9 ore are forma unui pătrat cu latura de 9 metri. De cât timp are nevoie Ion pentru a săpa o suprafață având forma unui pătrat cu latura de 3 metri?

Soluție.
Vasile munceşte cu 6 ore în plus față de Ion, prin urmare retribuția pentru o oră de muncă este de $90:6=15$ lei. .... 2 puncte
Ion primeşte $9\cdot 15=135$ lei, iar Vasile primeşte $15\cdot 15=225$ lei. .... 2 puncte
Un pătrat cu latura de 3 m are aria de nouă ori mai mică decât cea a unui pătrat cu latura de 9 m. Timpul necesar va fi de nouă ori mai mic, deci Ion are nevoie de 1 oră .... 3 puncte

2. Pe latura CD a dreptunghiului $ABCD$ se consideră punctele P şi Q astfel încât $DP=PQ=QC$. Definim punctele R şi S prin $2\overrightarrow{AR}=3\overrightarrow{AP}$, respectiv $\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AR}$.

a) Demonstrați că punctele A, C şi S sunt coliniare.

b) Arătați că Q este centrul de greutate al triunghiului ARS.

Soluție.

a) $\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}\right)=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$,
prin urmare punctele A, C şi S sunt coliniare. .... 4 puncte

b) Dacă M este mijlocul lui RS, ar trebui să dovedim că $\overrightarrow{AQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AR}+\overrightarrow{AS}\right)$. Însă Q este mijlocul lui PC, prin urmare $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AR}+\overrightarrow{AS}\right)$, de unde concluzia problemei
.... 3 puncte

3. Se consideră numerele reale *a*, *b* şi *c* astfel încât $a \le b \le c$, $a+b+c=1$ şi $a^2+b^2+c^2=1$.

a) Demonstraţi că $b \in \left[0, \frac{2}{3}\right]$.

b) Găsiţi trei numere reale, distincte două câte două, având proprietăţile din enunţ.

Soluţie.

a) Dacă, prin absurd, $b<0$, vom avea şi $a<0$. Rezultă că $c=1-a-b>1$, prin urmare a^2+b^2+ $+c^2>0+0+1=1$, contradicţie. .... 2 puncte

Dacă, prin absurd, $b>\frac{2}{3}$, vom avea şi $c>\frac{2}{3}$. Rezultă că $a=1-b-c<-\frac{1}{3}$, prin urmare a^2+b^2+ $+c^2>\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}=1$, contradicţie. .... 2 puncte

b) Considerăm, de exemplu, $b=\frac{1}{3}$. Obţinem că $a+c=\frac{2}{3}$ şi $a^2+c^2=\frac{8}{9}$; rezolvând prin metoda substituţiei acest sistem, obţinem pentru *a* şi *c* valorile $a=\frac{1-\sqrt{3}}{3}$, $c=\frac{1+\sqrt{3}}{3}$. .... 3 puncte

4. Pentru fiecare număr natural *m*, se consideră mulţimea $A_m=\{x\in\mathbb{Z} \mid |2x-1|+|3x-1|=m\}$.

a) Determinaţi A_0.

b) Demonstraţi că, oricare ar fi numărul natural *m*, mulţimea A_m are cel mult un element.

c) Dacă *n* este un număr întreg oarecare, arătaţi că există un număr natural *m* pentru care $n\in A_m$.

Soluţie.

a) $A_0=\varnothing$ .... 2 puncte

b) Dacă $x\le 0$, ecuaţia ale cărei soluţii constituie mulţimea A_m devine $5x=2-m$. Cum $x\in\mathbb{Z}$, soluţia corespunzătoare este convenabilă dacă şi numai dacă $m=5n+2, n\in\mathbb{N}$, caz în care $-n\in A_m$.
Dacă $x\ge 1$, ecuaţia ale cărei soluţii constituie mulţimea A_m devine $5x=2+m$. Cum $x\in\mathbb{Z}$, soluţia corespunzătoare este convenabilă dacă şi numai dacă $m=5n+3, n\in\mathbb{N}$, caz în care $n+1\in A_m$.
.... 3 puncte

Întrucât un număr nu poate da simultan restul 2 şi restul 3 la împărţirea prin 5, rezultă că A_m este fie vidă, fie conţine exact un element. .... 1 punct

c) Am observat că $-n\in A_{5n+2}$ şi $n+1\in A_{5n+3}$, oricare ar fi numărul natural *n*, de unde cerinţa problemei .... 1 punct

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
19 martie 2016

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A X-A

1. a) Demonstraţi că $\left(29\sqrt{2}+41\right)\cdot\left(29\sqrt{2}-41\right)=1$

b) Calculaţi $\left(1+\sqrt{2}\right)^2;\left(1+\sqrt{2}\right)^3$ şi $\left(1+\sqrt{2}\right)^5$

c) Determinaţi $n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2$ pentru care are loc egalitatea $\sqrt[n]{29\sqrt{2}+41}-\sqrt[n]{29\sqrt{2}-41}=2$.

Soluţie.

a) $\left(29\sqrt{2}+41\right)\cdot\left(29\sqrt{2}-41\right)=1682-1681=1$ .... 1 punct

b) $\left(1+\sqrt{2}\right)^2=3+2\sqrt{2};\left(1+\sqrt{2}\right)^3=7+5\sqrt{2};\left(1+\sqrt{2}\right)^5=41+29\sqrt{2}$ .... 2 puncte

c) Notăm $\sqrt[n]{29\sqrt{2}+41}=a, a>0 \Rightarrow \sqrt[n]{29\sqrt{2}-41}=\frac{1}{a}$ .... 1 punct

Ecuaţia devine $a-\frac{1}{a}=2\Rightarrow a^2-2a-1=0$, cu soluţiile $a_{1,2}=1\pm\sqrt{2}$

Cum $a>0\Rightarrow a=1+\sqrt{2}$ .... 1 punct

$\sqrt[n]{29\sqrt{2}+41}=1+\sqrt{2}\Rightarrow 29\sqrt{2}+41=\left(1+\sqrt{2}\right)^n\Rightarrow$ .... 1 punct

$\left(1+\sqrt{2}\right)^5=\left(1+\sqrt{2}\right)^n\Rightarrow n=5$ .... 1 punct

2. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\log_2\left(x^2+4\right)-\log_2 x=4x-x^2-2$.

Soluţie.

Condiţiile de existenţă, $x>0$ .... 1 punct

$\log_2\frac{x^2+4}{x}=4x-x^2-2\Rightarrow\log_2\frac{x^2+4}{x}-2=4x-x^2-4\Rightarrow 2-\log_2\frac{x^2+4}{x}=x^2-4x-4\Rightarrow$

.... 2 puncte

$\log_2 4-\log_2\frac{x^2+4}{x}=x^2-4x+4\Rightarrow\log_2 4-\log_2\frac{x^2+4}{x}=\left(x-2\right)^2\Rightarrow\log_2\frac{4x}{x^2+4}=\left(x-2\right)^2\ (1)$

.... 2 puncte

Observăm că $\left(x-2\right)^2\geq 0, \forall x>0$, iar $\frac{4x}{x^2+4}\leq 1, \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow\log_2\frac{4x}{x^2+4}\leq\log_2 1\Rightarrow\log_2\frac{4x}{x^2+4}\leq 0$.

.... 1 punct

Egalitatea (1) nu poate avea loc decât dacă ambii membri sunt nuli:

$\frac{4x}{x^2+4}=1$ şi $\left(x-2\right)^2=0\Rightarrow x=2$

.... 1 punct

3. Determinați mulțimea $M=\left\{(x,y)\in \mathcal{P} \mid \operatorname{Re}\left(\frac{z-2}{z-4i}\right)=0\right\}$.

Reprezentați geometric mulțimea *M*. (unde $z=x+yi, \mathcal{P}$ - planul complex)

Soluție.

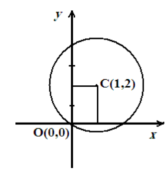
$\frac{z-2}{z-4i}=\frac{x+iy-2}{x+iy-4i}=\frac{x-2+iy}{x+i(y-4)}=\frac{x(x-2)+y(y-4)+ixy-i(y-4)(x-2)}{x^2+(y-4)^2}$ .... 2 puncte

$\Rightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{z-2}{z-4i}\right)=0 \Leftrightarrow x(x-2)+y(y-4)=0 \Leftrightarrow x^2-2x+y^2-4y=0$ .... 2 puncte

$\Leftrightarrow (x^2-2x+1)+(y^2-4y+4)=5$ .... 1 punct

$(x-1)^2+(y-2)^2=5 \Rightarrow M=\left\{(x,y)\in \mathcal{P} \mid (x-1)^2+(y-2)^2=5\right\}$. .... 1 punct

Imaginea geometrică a elementelor mulțimii *M* este cercul de centru $C(1,2)$ şi rază $r=\sqrt{5}$.



.... 1 punct

4. La un turneu de fotbal în sală participă 15 echipe, fiecare jucând o singură dată cu fiecare dintre celelalte echipe. Pentru victorie se acordă echipei câştigătoare 3 puncte, pentru meci egal câte 2 puncte pentru fiecare echipă, iar pentru înfrângere 1 punct. În clasamentul întocmit la sfârşitul turneului nu există echipe cu acelaşi număr de puncte, iar echipa clasată pe ultimul loc are 21 puncte.

a) Care este numărul de meciuri disputate în cadrul turneului ?
b) Care este numărul total de puncte acordate la toate meciurile ?
c) Să se demonstreze că prima clasată a făcut cel puțin un meci egal.

Soluție.

a) Fiecare echipă a disputat 14 meciuri. Numărul de meciuri disputate a fost $C_{15}^2=\frac{15\cdot 14}{2}=105$
.... 1 punct

b) Cum la fiecare meci s-au acordat exact 4 puncte, deducem că numărul total de puncte acordate a fost $105\cdot 4=420$ .... 1 punct

c) Cum ultima clasată are 21 puncte, iar în clasament nu sunt echipe cu acelaşi număr de puncte, rezultă că numărul total de puncte este cel puțin $21+(21+1)+(21+2)+(21+3)+...+(21+14)=$

$=21\cdot 15+\frac{14\cdot 15}{2}=420$ .... 2 puncte

Din acest raționament deducem că echipele au punctajele: 21, 22, 23, ..., 35 .... 1 punct

Presupunem că echipa situată pe primul loc nu a făcut nici un meci egal şi notăm cu *x* numărul victoriilor şi cu *y* numărul înfrângerilor .... 1 punct

Obținem: $\begin{cases} x+y=14 \\ 3x+y=35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{21}{2}\notin \mathbb{N} \\ y=\frac{7}{2}\notin \mathbb{N} \end{cases}$ .... 1 punct

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiințele naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XI-A

1. În fiecare din cele 9 căsuțe ale unei table de latura 3 este scrisă cifra 0. Se alege un pătrat de latură 2 şi se măreşte numărul scris în fiecare din cele 4 căsuțe cu o unitate. Folosind repetat acest procedeu putem obține configurația alăturată ? (Suma tuturor numerelor din configurație nu este multiplu de 4).

4	9	6
7	24	11
6	12	8

Soluție.
La fiecare alegere a unui pătrat 2×2 se măreşte suma numerelor cu 4, aşadar suma tuturor numerelor trebuie să fie multiplu de 4 .... 4 puncte
În tabla dată suma numerelor nu este multiplu de 4, deci nu se poate ajunge la configurația cerută 3puncte

2. Fie matricele $A=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ şi $X(a)=I_2+aA; a\in\mathbb{R}$. Demonstrați că $X(a)$ este inversabilă dacă şi numai dacă $a\neq -1$ şi calculați $X^{-1}(1)\cdot X(2)\cdot X^{-1}(3)\cdot X(4)\cdot\ldots\cdot X^{-1}(2013)\cdot X(2014)\cdot$

(Meda Bujor, Supliment Gazeta Matematică – septembrie 2015)

Soluție.

$\det X(a)=\begin{vmatrix} 1-a & -a \\ 2a & 1+2a \end{vmatrix}=1+a$ .... 2 puncte

$X(a)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det X(a)\neq 0 \Leftrightarrow a\neq -1$ .... 1 punct

$X^{-1}(a)=X\left(-\frac{a}{1+a}\right), \forall a\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ .... 1 punct

$X^{-1}(n)\cdot X(n+1)=X\left(\frac{1}{n+1}\right); \forall n\in\mathbb{N}^*$ .... 1 punct

$X(a_1)\cdot X(a_2)\cdot X(a_3)\cdot\ldots\cdot X(a_n)=X\left((1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)-1\right), \forall a_1,a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$ .... 1 punct

Finalizare .... 1 punct

3. Fie A, B, C puncte necoliniare în plan având coordonate întregi.

Să se arate că aria ΔABC este mai mare sau egală cu $\frac{1}{2}$.

Soluție.

Aria $\Delta ABC = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} \right|$ .... 3 puncte

$\left| \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} \right| \in \mathbb{N}^*$ .... 2 puncte

Aria $\Delta ABC \geq \frac{1}{2}$ .... 2 puncte

4. a) Precizați dacă următoarele afirmații sunt adevărate sau false:

i) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 1$; ii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x+\pi)}{x+\pi} = 1$. Justificare.

b) Să se calculeze raportul $\frac{a}{b}$ ştiind că $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(ax)-\sin(ax)}{\operatorname{tg}(bx)-\sin(bx)} = 2016^3$.

Soluție.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ şi $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x+\pi)}{x+\pi} = 0$. Aşadar ambele afirmații sunt false .... 4 puncte

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(ax)-\sin(ax)}{\operatorname{tg}(bx)-\sin(bx)} = \left(\frac{a}{b}\right)^3$ .... 2 puncte

Finalizare $\frac{a}{b} = 2016$ .... 1 punct

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
19 martie 2016

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XII-A

1. Se consideră mulţimea $G=\left\{A(k)=\begin{pmatrix}2^k & 0 & 2^k\\ 0 & 0 & 0\\ 2^k & 0 & 2^k\end{pmatrix}, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

a) Să se arate că pentru orice m,n întregi, are loc: $A(m)\cdot A(n)=A(m+n+1)$

b) Să se demonstreze că $(G,\cdot)$ este un grup abelian, unde "·" reprezintă înmulţirea matricelor;

c) Dacă mulţimea $H\neq\{A(-1)\}$ este un subgrup al grupului (G,·), să se demonstreze că H are cel puţin 2016 elemente.

Soluţie.

a) $A(m)\cdot A(n)=\begin{pmatrix}2^{m+n+1} & 0 & 2^{m+n+1}\\ 0 & 0 & 0\\ 2^{m+n+1} & 0 & 2^{m+n+1}\end{pmatrix}$ .... 1 punct

b) Element neutru A(-1) .... 1 punct
Verificarea celorlalte axiome .... 1 punct
c) Daca $H\neq\{A(-1)\}$ este un subgrup atunci exista $A(k)$ in H cu $k\in\mathbb{Z}-\{-1\}$ de unde rezultă
$(A(k))^n$ este în H, pentru orice n număr natural nenul .... 1 punct
$(A(k))^n=A(nk+n-1)$ .... 1 punct
$x_n = nk + n - 1$ este un şir strict crescător .... 1 punct
H are cel puţin 2016 elemente .... 1 punct

2. Considerăm funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+e^x$ şi $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$.

a) Arătaţi că funcţia F este bijectivă;

b) Calculaţi $\int_0^{e-\frac{2}{3}} F^{-1}(x)\,dx$.

Soluţie.

a) F bijectivă ↔ F injectivă şi F surjectivă .... 1 punct

$F(x)' = f(x) = x^2 + e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R} \to F$ strict crescătoare, deci F injectivă .... 1 punct

F continuă, deci F are proprietatea lui Darboux; $\lim_{x\to\infty} F(x) = \infty; \lim_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$, deci F este surjectivă .... 1 punct

b) Facem substituția $x = F(t)$, de unde $dx = f(t)dt$; $x_1 = 0$ deci $t_1 = 0$ și $x_2 = e - \frac{2}{3}$ deci $t_2 = 1$

.... 2 puncte

$\int_0^{e-\frac{2}{3}} F^{-1}(x)dx = \int_0^1 tf(t)dt = \frac{5}{4}$ .... 2 puncte

3. Pe mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$, definim legea de compoziție $x * y = xy + 5x + 5y + 20$. Se admite faptul că $G = (-5, \infty)$ împreuna cu legea de compoziție "*" are o structură algebrică de grup.

a) Să se arate că grupurile $(G,*)$ şi $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ sunt izomorfe;

b) Să se calculeze -2016 * (-2015) *… *(-1)*0*1* … * 2015 *2016;

c) Se consideră mulțimea $H = \{a^2 - 5, a \in \mathbb{Q}\}$. Să se arate că (H,*) este un subgrup al grupului (G,*).

Soluție.

a) $f(x) = x + 5, f: (-5,\infty) \to (0,\infty)$ .... 2 puncte

b) $-5 \in \mathbb{R}$ element absorbant, de unde -2016 * (-2015) *… *(-1)*0*1* … *2015*2016 = -5

.... 2 puncte

c) $x * y = (ab)^2 - 5 \in$ H .... 2 puncte

$x^{-1} \in$ H .... 1 punct

4. Pentru orice n număr natural nenul, se consideră numerele $I_n = \int \frac{\sin(nx)}{\sin(x)} dx, \forall x \in (0, \pi)$.

a) Să se demonstreze că $I_{n+2} = I_n + \frac{2\sin(n+1)x}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$;

b) Să se determine funcția $f: (0, \pi) \to \mathbb{R}$, ştiind că $f'(x) \cdot \sin x = \sin 5x$ şi $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Soluție.

a) $I_{n+2} - I_n = \int \frac{\sin(n+2)x - \sin x}{\sin x} dx = 2\int \cos(n+1)x dx = 2\frac{\sin(n+1)x}{n+1} + C$

.... 3 puncte

b) $f'(x) = \frac{\sin 5x}{\sin x} \Rightarrow f(x) = I_5$

.... 1 punct

$I_5 = I_3 + \frac{2\sin 4x}{4} = I_1 + \frac{2\sin 2x}{2} + \frac{2\sin 4x}{4} = x + \sin 2x + \frac{\sin 4x}{2} + C$

.... 2 puncte

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow C = -\frac{\pi}{2}$ .... 1 punct