INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

# CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

## ETAPA JUDEŢEANĂ
## 19 martie 2016

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

**Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecţia mediului**

## BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
## CLASA A IX-A

**1.** La un concurs Adolf Haimovici, organizatorii au oferit drept premiu primilor 5 elevi clasaţi la clasa a IX-a un total de 17 cărţi, fiecare elev primind cel puţin o carte.
a) Stabiliţi dacă, în mod necesar, cel puţin doi elevi primesc mai mult de câte o carte.
b) Arătaţi că cel puţin un elev primeşte mai mult de 3 cărţi.
c) Determinaţi în câte moduri se pot distribui premiile, astfel încât fiecare premiant să primească alt număr de cărţi.

**Soluţie:**
a) Nu este necesar. Este posibil ca un elev să primească 13 cărţi şi ceilalţi 4 câte o carte. .... 2 puncte
b) Dacă toţi elevii ar primi cel mult trei cărţi atunci ar fi un total de cel mult 15 cărţi, deci cel puţin un elev primeşte mai mult de trei cărţi. ........................................ 2 puncte
c) Considerând $a<b<c<d<e$, $a\geq 1$, $b\geq 2$, $c\geq 3$, $d\geq 4$, $e\geq 5$, numărul de cărţi primite de cei cinci elevi, rezultă $a+b+c+d+e\geq 1+2+3+4+5=15$ .................... 1 punct
şi cum $a+b+c+d+e=17$, rămân două posibilităţi
$(a;b;c;d;e)=(1;2;3;4;7)$ .................... 1 punct
şi $(a;b;c;d;e)=(1;2;3;5;6)$ .................... 1 punct

**2.** Fie $M$ mulţimea tuturor progresiilor aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ cu toţi termenii numere naturale.
a) Considerând progresia $(a_n)_{n\geq 1}\in M$ care are $a_1=6$ şi $r=10$, verificaţi dacă $2016$ este sau nu termen al acestei progresii.
b) Determinaţi câte din progresiile $(a_n)_{n\geq 1}\in M$ care au $r=10$, au printre termenii lor numărul $2016$.
c) Determinaţi câte din progresiile $(a_n)_{n\geq 1}\in M$ care au $a_1=6$, au printre termenii lor numărul $2016$.

**Soluţie**:
a) $a_n=a_1+(n-1)\cdot r$ .................... 1 punct
$a_1=6$, $r=10 \Rightarrow a_n=10n-4$ .................... 1 punct
$a_n=2016 \Rightarrow 10n-4=2016 \Rightarrow n=202$, deci $2016=a_{202}$ .................... 1 punct
b) $a_1+(n-1)\cdot 10=2016$ .................... 1 punct
$a_1=2026-10n\in\mathbb{N} \Rightarrow n\in\{1;2;3;....;202\}$,
deci sunt 202 progresii cu această proprietate .................... 1 punct
c) $a_n=6+(n-1)\cdot r=2016 \Rightarrow (n-1)\cdot r=2010=2\cdot 3\cdot 5\cdot 67$
$r/2010$ .................... 1 punct
şi cum $2010$ are 16 divizori, sunt 16 progresii cu această proprietate .................... 1 punct

**3.** Fie triunghiul $ABC$, $M$ mijlocum laturii $(BC)$ și punctele $P, Q, R$ astfel încât $\overrightarrow{AP} = x \cdot \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ} = y \cdot \overrightarrow{AM}$ și $\overrightarrow{AR} = z \cdot \overrightarrow{AC}$, cu $x, y, z \in (0; +\infty)$. Arătați că:

a) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$

b) $\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{y}{2} - x\right) \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{y}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$

c) Punctele $P$, $Q$, $R$ sunt coliniare dacă și numai dacă $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{2}{y}$

**Soluție:**

a) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$ ............................... 1 punct

b) $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP}$ ............................................................................................................ 1 punct

$\overrightarrow{AQ} = y \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{y}{2} \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$ ........................................................................................ 1 punct

$\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{y}{2} - x\right)\overrightarrow{AB} + \frac{y}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$ ......................................................................................... 1 punct

c) $P$, $Q$, $R$ sunt coliniare dacă și numai dacă sunt coliniari vectorii $\overrightarrow{PQ}$ și $\overrightarrow{PR}$ .................... 1 punct

$\overrightarrow{PR} = z \cdot \overrightarrow{AC} - x \cdot \overrightarrow{AB}$ ............................................................................................................ 1 punct

$\overrightarrow{PQ}$ și $\overrightarrow{PR}$ sunt coliniari $\Leftrightarrow \frac{y - 2x}{-2x} = \frac{y}{2z} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{2}{y}$ ...................................................... 1 punct

**4.** Un turist parcurge un traseu $ABCD$ format din trei drumuri, $AB$, $BC$ și $CD$, toate de aceeași lungime egală cu 60 km. Turistul merge pe drumurile specificate cu vitezele $v_1$, $v_2$, respectiv $v_3$, măsurate în $km/h$.

a) Dacă $v_1 = 30$, $v_2 = 20$ și $v_3 = 50$, determinați durata $t_1$ a parcurgerii întregului traseu, măsurată în ore și minute.

b) Dacă turistul ar parcurge întregul traseu cu viteza medie $v = \frac{v_1 + v_2 + v_3}{3}$ a celor trei viteze de la punctul anterior, determinați durata $t_2$ a parcurgerii întregului traseu, măsurată în ore și minute.

c) Arătați că, oricare ar fi vitezele $v_1$, $v_2$, respectiv $v_3$, are loc inegalitatea $t_1 \geq t_2$.

**Soluție:**

a) $t_1 = \frac{60km}{v_1} + \frac{60km}{v_2} + \frac{60km}{v_3}$ ............................................................................... 1 punct

$= \ldots = 6h$ și $12$ $min$ ..................................................................................................... 1 punct

b) $v = \frac{100}{3} km/h \Rightarrow t_2 = \frac{180}{v} = 5h$ și $24\, min$. ........................................................................ 1 punct

c) $t_1 = 60 \cdot \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}\right)$ ........................................................................................... 1 punct

$t_2 = 540 \cdot \left(\frac{1}{v_1 + v_2 + v_3}\right)$ ................................................................................................ 1 punct

$t_1 \geq t_2 \Leftrightarrow (v_1 + v_2 + v_3) \cdot \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}\right) \geq 9$ ....................................................................... 1 punct

Demonstrarea inegalității ..................................................................................................... 1 punct

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

# CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

## ETAPA JUDEŢEANĂ 19 martie 2016

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

**Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecţia mediului**

## BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE CLASA A X-A

**1.** Rezolvaţi, în mulţimea numerelor reale, ecuaţiile:

a) $5^{2x+1}=4\cdot 5^x+1$

b) $x^2+2\sqrt{x^2-3x-4}=3x+4$

c) $\log_4(3x-2)\cdot\log_x 2=1$

**Soluţie:**

a) $5^x=y\Rightarrow 5y^2-4y-1=0\Rightarrow y_1=1,\ y_2=-\frac{1}{5}$ ........ 1 punct

$5^x=1\Rightarrow x=0$, $5^x=-\frac{1}{5}$ nu are soluţie. ........ 1 punct

b) $x^2-3x-4\geq 0$, $x\in(-\infty;-1]\cup[4;+\infty)$ ........ 1 punct

$x^2-3x-4+2\sqrt{x^2-3x-4}=0\Rightarrow x^2-3x-4=0\Rightarrow x\in\{-1;4\}$ ........ 1 punct

c) $x\in\left(\frac{2}{3};+\infty\right)\setminus\{1\}$ ........ 1 punct

$\log_4(3x-2)=\frac{\log_2(3x-2)}{2}$; $\log_x 2=\frac{1}{\log_2 x}$ ........ 1 punct

şi se obţine ecuaţia $x^2-3x+2=0$ cu soluţii $x_1=1$ şi $x_2=2$ dintre care acceptată de condiţia $x\in\left(\frac{2}{3};+\infty\right)\setminus\{1\}$ este numai $x=2$ ........ 1 punct

**2.** Venitul lunar al unui tehnoredactor este format din salariul de bază de 800 lei la care se adaugă un spor astfel: dacă reuşeşte să tehnoredacteze până la 200 pagini i se dă un comision de 2 lei pentru fiecare pagină scrisă iar pentru fiecare pagină ce depăşeşte 200 primeşte 3 lei pentru fiecare pagină.

a) Determinaţi câţi bani primeşte tehnoredactorul dacă într-o lună scrie 150 pagini. Dar dacă scrie 250 pagini?

b) Arătaţi că funcţia pe baza căreia se calculează venitul lunar al tehnoredactorului este $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $f(n)=\begin{cases}2n+800, & \text{dacă } n\leq 200\\ 3n+600, & \text{dacă } n>200\end{cases}$,

unde $n$ este numărul de pagini scrise de tehnoredactor.

c) Determinaţi câte pagini trebuie să scrie tehnoredactorul pentru a câştiga într-o lună 1620 lei.

**Soluţie:**

a) Dacă scrie 150 pagini, câştigă $800+150\cdot 2=1100$ lei ........ 1 punct

Dacă scrie 250 pagini, câştigă $800+200\cdot 2+50\cdot 3=1350$ lei ........ 2 puncte

b) Dacă $n \le 200 \Rightarrow f(n) = 800 + 2n$ ........................................................................................ 1 punct

Dacă $n > 200 \Rightarrow f(n) = 800 + 200 \cdot 2 + (n-200) \cdot 3 = 3n + 600$ ........................................... 1 punct

c) $n \le 200 \Rightarrow 2n + 800 = 1620 \Rightarrow n = 410$, contradicție ........................................................ 1 punct

$n > 200 \Rightarrow 3n + 600 = 1620 \Rightarrow n = 340$, ....................................................................... 1 punct

**3.** Considerăm numerele complexe $z_a = \dfrac{1 - a \cdot i}{1 + a \cdot i}$, $a \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$.

a) Determinați modulul și forma algebrică a numărului $z_a$

b) Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care $z_a = \dfrac{3}{5} - \dfrac{4}{5} \cdot i$

c) Arătați că $\left(z_{\sqrt{3}}\right)^{2016}$ este număr real.

**Soluție:**

a) $|z_a| = 1$ ........................................................................................................................ 1 punct

$z_a = \dfrac{1-a^2}{1+a^2} - \dfrac{2a}{1+a^2} \cdot i$ .................................................................................................... 2 puncte

b) $z_a = \dfrac{3}{4} - \dfrac{4}{5} \cdot i \Rightarrow \dfrac{1-a^2}{1+a^2} = \dfrac{3}{5}$, $-\dfrac{2a}{1+a^2} = -\dfrac{4}{5}$ ........................................................... 1 punct

$a = \dfrac{1}{2}$ ......................................................................................................................... 1 punct

c) $\left(z_{\sqrt{3}}\right)^3 = 1 \Rightarrow \left(z_{\sqrt{3}}\right)^{2016} = 1 \in \mathbb{R}$ ................................................................................ 2 puncte

**4.** a) Arătați că $3\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \ge (x + y + z)^2$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$.

b) Demonstrați că $3^{2n} > 3n + 99$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 3$.

c) Determinați numerele naturale $n, a, b$ și $c$, știind că $a + b + c = 3^n$ și $a^2 + b^2 + c^2 = 33 + n$.

**Soluție.**

a) Inegalitatea este echivalentă cu $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \ge 0$, adevărat ....................... 1 punct

b) Inductiv: $n = 3$, $3^6 > 108$, adevărat

Dacă $3^{2k} > 3k + 99$, $k \ge 3$, atunci $3^{2k+2} = 3^{2k} \cdot 9 > (3k+99) \cdot 9 > 3 \cdot (k+1) + 99$ ..................... 2 puncte

c) Fie $a, b, c$ în condiția cerută, conform cu a) $\Rightarrow 3\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \ge (a+b+c)^2 \Rightarrow 3(33+n) \ge 3^{2n}$ și folosind b) $\Rightarrow n \in \{0; 1; 2\}$ ........................................................................................ 2 puncte

Pentru $n = 0$ și $n = 1$ nu avem soluții ........................................................................ 1 punct

Pentru $n = 2$, $a + b + c = 9$, $a^2 + b^2 + c^2 = 35$, cu soluția $(a;b;c) = (1;3;5)$ și orice permutare a acesteia. ...................................................................................................................... 1 punct

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

## ETAPA JUDEȚEANĂ
## 19 martie 2016

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL


**Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului**

**BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE**
**CLASA A XI-A**

**1.** Fie matricele $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}1 & b\\ c & 1\end{pmatrix}$, $a,b,c\in\mathbb{R}$. Se cere:

a) Arătați că $A^n=n\cdot A-(n-1)\cdot I_2$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

b) Demonstrați că nu există $X\in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A^3\cdot X-X\cdot A^3=B$.

c) Arătați că egalitatea $(A+B)^2=A^2+2\cdot A\cdot B+B^2$ este adevărată dacă și numai dacă $a\cdot c=0$.

**Soluție:**

a) Verificare prin inducție. $n=2$, $A^2=2\cdot A-I_2$ ............................................................ 1 punct

Dacă $A^k=k\cdot A-(k-1)\cdot I_2$, atunci $A^{k+1}=A^k\cdot A=...=(k+1)\cdot A-k\cdot I_2$ ............................... 1 punct

b) Presupunem $X$ cu proprietatea cerută, $\Rightarrow$

$$A^3\cdot X-X\cdot A^3=(3\cdot A-2\cdot I_2)\cdot X-X\cdot(3\cdot A-2\cdot I_2)=3\cdot(A\cdot X-X\cdot A)=B\Leftrightarrow A\cdot X-X\cdot A=\frac{1}{3}\cdot B$$

........................................................................................................................ 1 punct

$X=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}a\cdot z & a\cdot(t-x)\\ 0 & -z\cdot a\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & b\\ c & 1\end{pmatrix}$ ..................................................................... 1 punct

$\Rightarrow a\cdot z=\frac{1}{3}$ și $a\cdot z=-\frac{1}{3}$, contradicție ........................................................................ 1 punct

c) Cum $(A+B)^2=A^2+A\cdot B+B\cdot A+B^2$, cerința este echivalentă cu $A\cdot B=B\cdot A$ ................ 1 punct

iar $A\cdot B=B\cdot A\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1+a\cdot c & b+a\\ c & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & b+a\\ c & a\cdot c+1\end{pmatrix}\Leftrightarrow a\cdot c=0$ ........................................ 1 punct

**2.** Fie funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3+x+1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=3e^x-2x+1$. Se cere:

a) Arătați că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=1$

b) Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(0)\cdot g(x)-g(0)f(x)}{x}$

c) Determinați numerele $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care limita $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a\cdot g(x+1)+b\cdot f(x)}{x}$ există și este egală cu 2.

**Soluție:**

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^3+x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(2x^2+1)=1$ ........................................................... 1 punct

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3e^x-2x-3}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(3\cdot\dfrac{e^x-1}{x}-2\right)=1$ ................................................ 2 puncte

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(0)\cdot g(x)-g(0)f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(3\cdot\dfrac{e^x-1}{x}-8x^2-6\right)=-3$ ............................................ 2 puncte

c) Dacă $a\cdot g(1)+b\cdot f(0)\neq 0$, limitelale laterale $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{a\cdot g(x+1)+b\cdot f(x)}{x}$ și

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{a\cdot g(x+1)+b\cdot f(x)}{x}$ sunt fie $+\infty$, fie $-\infty$, deci în mod necesar

$a\cdot g(1)+b\cdot f(0)=0$ ........................................................................................................ 1 punct

Dacă $a\cdot g(1)+b\cdot f(0)=0$, atunci $b=-a\cdot(3e-1)$ și $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{a\cdot g(x+1)+b\cdot f(x)}{x}=-a$, din care

rezultă $a=-2$ și $b=6e-2$ ........................................................................................ 1 punct

**3.** Fie matricea $A=\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2\\ b & b+1 & b+2\\ 1 & 2 & c\end{pmatrix}$, cu $a,b,c\in\mathbb{R}$. Se cere:

a) Arătați că $\det A=(a-b)(c-3)$.

b) Demonstrați că pentru $a=3,\ b=2,\ c=4$, matricea $A$ este inversabilă și inversa $A^{-1}$ are toate elementele numere întregi.

c) Determinați o matrice $C\in M_3(\mathbb{Z})$, inversabilă și astfel încât să aibă inversa $C^{-1}$ cu toate elementele numere naturale.

**Soluție:**

a) $\det A=(a-b)(c-3)$ ........................................................................................ 2 puncte

b) $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5\\ 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow \det A=1$, deci $\det A\neq 0$, $\Rightarrow$ $A$ inversabilă ....................................... 1 punct

$A^{-1}=\begin{pmatrix} 4 & -6 & 1\\ -4 & 7 & -2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$ ........................................................................................ 2 puncte

c) Alegând $C=\begin{pmatrix} 4 & -6 & 1\\ -4 & 7 & -2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow C^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5\\ 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$ ...................................................... 2 puncte

**4.** O sursă de căldură încălzește uniform un corp. Experimental, constatăm că temperatura corpului este dată de legea $T(t)=a\cdot t^b+c-\sqrt{t^2+d\cdot t+25}$, cu $a,b,c,d>0$, unde numărul $t\geq 0$ reprezintă momentul măsurării, exprimat în minute, iar numărul $T(t)$ reprezintă temperatura corpului, exprimată în grade Celsius, la fiecare moment $t\geq 0$ ales. Se știe că la momentul inițial $t=0$ temperatura corpului este de $7$ grade Celsius iar atunci când $t\to\infty$, temperatura corpului se apropie infinitezimal de 10 grade Celsius, adică $\lim\limits_{t\to\infty}T(t)=10$.

a) Arătați că $c=12$.

b) Demonstrați că $\lim_{t\to\infty} T(t) = +\infty \cdot \operatorname{sgn}(b-1)$, unde $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, & \text{dacă } x > 0 \\ -1, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$.

c) Arătați că $T(t) = t + 12 - \sqrt{t^2 + 4t + 25}$.

d) Determinați la ce moment $t$ temperatura corpului va fi de 9 grade Celsius.

e) Demonstrați că, la orice moment $t \geq 0$, temperatura corpului este strict mai mică de 10 grade Celsius.

**Soluție:**

a) $T(0) = 7 \Leftrightarrow c - 5 = 7 \Leftrightarrow c = 12$ .......... 1 punct

b) $b > 1 \Rightarrow b - 1 > 0$ și $\lim_{t\to\infty} T(t) = \lim_{t\to\infty}\left[t \cdot \left(a \cdot t^{b-1} + \frac{c}{t} - \sqrt{1 + \frac{d}{t} + \frac{25}{t^2}}\right)\right] = \infty \cdot \infty = \infty$ .......... 1 punct

$b < 1 \Rightarrow 1 - b > 0$ și $\lim_{t\to\infty} T(t) = \lim_{t\to\infty}\left[t \cdot \left(\frac{a}{t^{1-b}} + \frac{c}{t} - \sqrt{1 + \frac{d}{t} + \frac{25}{t^2}}\right)\right] = \infty \cdot (-1) = -\infty$ .......... 1 punct

c) Dacă $b = 1$, din $\lim_{t\to\infty} T(t) = 10$, $\lim_{t\to\infty}\left[t \cdot \left(a + \frac{c}{t} - \sqrt{1 + \frac{d}{t} + \frac{25}{t^2}}\right)\right] = 10 \Rightarrow a = 1$ .......... 1 punct

și atunci $\lim_{t\to\infty} T(t) = \lim_{t\to\infty}\left(t + 12 - \sqrt{t^2 + d \cdot t + 25}\right) = \lim_{t\to\infty} \frac{t(24-d) + 119}{t + 12 + \sqrt{t^2 + d \cdot t + 25}} = \frac{24-d}{2} = 10$,

deci $d = 4$ .......... 1 punct

d) $T(t) = 9 \Leftrightarrow t + 3 = \sqrt{t^2 + 4t + 25} \Rightarrow t = 8$ .......... 1 punct

e) $T(t) < 10 \Leftrightarrow t + 2 < \sqrt{t^2 + 4t + 25} \Leftrightarrow t^2 + 4t + 4 < t^2 + 4t + 25$, adevărat .......... 1 punct

## BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
## CLASA A XII-A

**1.** Fie funcția $f:[0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(1+x)$. Se cere:

a) Determinați primitiva $F:[0;+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției $f$, știind că $F(0)=0$.

b) Calculați $\int_0^{e-1} f(x)\,dx$.

c) Dacă $g:[0;+\infty)\to\mathbb{R}$ este o funcție derivabilă încât pentru orice $x\geq 0$ se verifică egalitatea $x+\int_0^x g(t)\,dt=(x+1)\cdot g(x)$, arătați că $g=f$.

**Soluție:**

a) $F(x)=\int\ln(x+1)\,dx=\int(x+1)'\cdot\ln(x+1)\,dx=(x+1)\cdot\ln(x+1)-\int dx=$

$=(x+1)\cdot\ln(x+1)-x+C,\ (\forall)\ C\in\mathbb{R}$ ........ 2 puncte

$F(0)=0\ \Rightarrow\ C=0$ ........ 1 punct

b) $\int_0^{e-1} f(x)\,dx=F(e-1)-F(0)=1$ ........ 2 puncte

c) $G(x)=(x+1)\cdot g(x)-x$ este primitivă a funcției $g$ și $G(0)=0\ \Rightarrow$ deducem $(x+1)\cdot g'(x)=1$ și $g(0)=0$ ........ 1 punct

$g(x)=\ln(x+1)$ ........ 1 punct

**2.** Definim pe mulțimea numerelor reale legea de compoziție $x\circ y=xy+2x+2y$. Se cere:

a) Arătați că legea "$\circ$" nu este asociativă.

b) Cercetați dacă structura algebrică $(\mathbb{R};\circ)$ admite element neutru.

c) Găsiți două numere $a,b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ astfel încât $a\circ b\in\mathbb{N}$.

d) Demonstrați că pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n^3\circ n\neq 2016$.

Soluție:

a) Spre exemplu, $(0\circ 1)\circ 2\neq 0\circ(1\circ 2)$ ........ 2 puncte

b) Dacă $e\in\mathbb{R}$ este element neutru, atunci $x\circ e=x$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow xe+2x+2e=x\Rightarrow e(x+2)=-x$ ........ 1 punct

și folosind unicitatea elementului neutru sau alegând $x=-2\ \Rightarrow\ 0=-2$, rezultă că $(\mathbb{R};\circ)$ nu are element neutru. ........ 1 punct

c) Observând $x\circ y=(x+2)(y+2)-4$, se poate alege, spre exemplu, $a=\sqrt{3}-2$, $b=2\sqrt{3}-2$ și cu aceste numere avem $a\circ b=\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}-4=2\in\mathbb{N}$ ........ 2 puncte

d) Fie $n^3 \circ n = 2016$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n^4 + 2n^3 + 2n = 2016$ și considerând $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n^4 + 2n^3 + 2n$, este strict crescătoare. Dar $f(6) < 2016$, $f(7) > 2016$ $\Rightarrow$ $f(n) \neq 2016$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$

........................................................................................................................................ 1 punct

**3.** În cadrul unui experiment, o sursă de căldură încălzește un corp astfel încât temperatura corpului, notată $t(x)$ și măsurată în grade Celsius, se modifică la fiecare moment $x \in [0; +\infty)$ al măsurării, exprimat în minute, prin funcția

$$t : [0; +\infty) \to \mathbb{R},\ t(x) = \begin{cases} x^2 + x + 2, & \text{dacă } x \in [0; 3] \\ 5x - 1, & \text{dacă } x \in (3; 6) \\ 29, & \text{dacă } x \in [6; +\infty) \end{cases}$$

a) Arătați că funcția $t : [0; +\infty) \to \mathbb{R}$ admite primitive și este integrabilă pe orice $[a; b] \subset [0; +\infty)$.

b) Știind că $M(a; b) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx$ exprimă valoarea medie a unei funcții $f$ care este integrabilă pe un interval $[a; b] \subset \mathbb{R}$, calculați temperatura medie înregistrată prin acest experiment pe intervalul momentelor $a = 4$ și $b = 8$.

c) Determinați după câte minute de la momentul inițial $x_0 = 0$, temperatura medie înregistrată atinge valoarea de 20 grade Celsius.

**Soluție:**

a) Singurele posibile puncte de discontinuitate sunt $x = 3$ și $x = 6$ și se constată $t$ continuă și în aceste puncte, deci admite primitive ........................................................................... 1 punct

Fiind continuă pe orice interval $[a; b] \subset [0; +\infty)$, este și integrabilă .................................... 1 punct

b) Conform cu formula de medie, temperatura medie pentru intervalul momentelor $a = 4$ și $b = 8$

este $M(4; 8) = \frac{1}{4}\int_4^8 t(x)\,dx = \frac{1}{4}\left(\int_4^6 t(x)\,dx + \int_6^8 t(x)\,dx\right)$ ........................................................... 1 punct

$\frac{1}{4}\int_4^6 t(x)\,dx = \frac{1}{4}\left(\frac{5x^2}{2} - x\right)\Bigg|_4^6 = 12$ .............................................................................................. 1 punct

$\frac{1}{4}\int_6^8 t(x)\,dx = \frac{1}{4} \cdot 29x\Big|_6^8 = 14{,}5$, deci $M(4; 8) = 26{,}5$ grade Celsius .......................................... 1 punct

c) Trebuie determinat $x$ astfel încât $M(0; x) = 20$, adică $\frac{1}{x} \cdot \int_0^x t(u)\,du = 20$

$$x \in [0; 3] \Rightarrow M(0; x) = \frac{1}{x}\int_0^x \left(u^2 + u + 2\right)du = \frac{1}{x}\left(\frac{u^3}{3} + \frac{u^2}{2} + 2u\right)\Bigg|_0^x = \frac{x^2}{3} + \frac{x}{2} + 2 \leq \frac{13}{2} < 20$$

$x \in (0;6) \Rightarrow M(0; x) = \frac{1}{x}\int_0^x t(u)\,du = \frac{1}{x}\left[\int_0^3 t(u)\,du + \int_3^x t(u)\,du\right] = \frac{5x}{2} - 1 < 20$ ........................ 1 punct

$$x \in [6; +\infty) \Rightarrow M(0; x) = \frac{1}{x}\int_0^x t(u)\,du = \frac{1}{x}\left[\int_0^6 t(u)\,du + \int_6^x t(u)\,du\right] = \frac{1}{x}(29x - 90)$$

și ecuația $\frac{1}{x}(29x - 90) = 20$ are soluția $x = 10$ ................................................................. 1 punct

**4.** Fie mulțimea $M=\left\{a^2-ab+b^2 \,/\, a,\, b\in\mathbb{Z}\right\}$ și numărul complex $\varepsilon=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $i^2=-1$.

a) Arătați că $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$ și $\varepsilon^3=1$

b) Arătați că, pentru orice $a,\, b\in\mathbb{Z}$, se verifică egalitatea $a^2-ab+b^2=(a+\varepsilon\cdot b)\left(a+\overline{\varepsilon}\cdot b\right)$,

unde $\overline{\varepsilon}=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ este conjugatul numărului complex $\varepsilon=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

c) Demonstrați egalitatea $\left(a_1^2-a_1b_1+b_1^2\right)\cdot\left(a_2^2-a_2b_2+b_2^2\right)=\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2$,

unde $\alpha=a_1a_2-b_1b_2$, $\beta=a_1b_2+a_2b_1-b_1b_2$ și $a_1,\, b_1,\, a_2,\, b_2\in\mathbb{Z}$.

d) Găsiți două numere $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ astfel încât $\left(2016^2-2016\cdot 2015+2015^2\right)^2=\alpha^2-\alpha\cdot\beta+\beta^2$.

<u>Soluție</u>:

a) Justifică $\varepsilon^2-\varepsilon+1=0$ și $\varepsilon^3=1$ ........................................................................................ 1 punct

b) $(a+\varepsilon\cdot b)\left(a+\overline{\varepsilon}\cdot b\right)=a^2+\left(\varepsilon+\overline{\varepsilon}\right)\cdot ab+\left(\varepsilon\cdot\overline{\varepsilon}\right)\cdot b^2=a^2-ab+b^2$ ...................................... 2 puncte

c) Se demonstrează implicația $x,\, y\in M \;\Rightarrow\; x\cdot y\in M$

$x=a_1^2-a_1b_1+b_1^2=(a_1+\varepsilon\cdot b_1)\left(a_1+\overline{\varepsilon}\cdot b_1\right)$, $y=a_2^2-a_2b_2+b_2^2=(a_2+\varepsilon\cdot b_2)\left(a_2+\overline{\varepsilon}\cdot b_2\right)$ .......... 1 punct

$\Rightarrow\; x\cdot y=(a_1+\varepsilon\cdot b_1)(a_2+\varepsilon\cdot b_2)\cdot\overline{(a_1+\varepsilon\cdot b_1)(a_2+\varepsilon\cdot b_2)}=$ .................................................... 1 punct

$=(\alpha+\varepsilon\cdot\beta)\cdot\overline{(\alpha+\varepsilon\cdot\beta)}=\alpha^2-\alpha\cdot\beta+\beta^2$, cu $\alpha=a_1a_2-b_1b_2$, $\beta=a_1b_2+a_2b_1-b_1b_2$ ............... 1 punct

d) Folosim punctul c) pentru $a_1=a_2=2016$, $b_1=b_2=2015$ și obținem $\alpha=4031$, $\beta=2015\cdot 2017$

........................................................................................................................................ 1 punct