



# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ  
8 martie 2014

FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil Tehnic

CLASA A IX-A

1. Se consideră mulțimea  $A = \{x \in \mathbb{R} / \text{există } a, b \in \mathbb{Z}, \text{ astfel încât } x^2 + ax + b = 0\}$ .

Să se demonstreze că:

- $1 \in A$ ;
- $1 + \sqrt{2} \in A$ ;
- $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin A$ .

2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , care verifică relația  $f(x-1) - 2f(0) = 2x - 3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

- Demonstrați că  $f(0) = 1$ .
- Demonstrați că  $f(x) = 2x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ .
- Calculați suma  $S = \frac{1}{f(0)f(1)} + \frac{1}{f(1)f(2)} + \dots + \frac{1}{f(100)f(101)}$ .

3. Se consideră un șir de numere reale strict pozitive  $a_1, a_2, \dots, a_n$  în progresie aritmetică cu rația  $r$ .

- Demonstrați că  $\frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{r} \left( \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right), \forall k \geq 1$ .
- Să se arate că  $S = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}, \forall n \geq 2$ .
- Calculați numărul  $P = \left(1 - \frac{r^2}{a_2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{r^2}{a_3^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{r^2}{a_n^2}\right)$ .

4. Fie patrulaterul ABCD și punctele M, N mijloacele laturilor AB, respectiv CD iar O punctul de intersecție al diagonalelor AC și BD.

- Demonstrați că  $2 \cdot \overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB}$
- Dacă  $AB \parallel CD$ , arătați că punctele M, N și O sunt coliniare.
- Dacă punctele M, N și O sunt coliniare, atunci  $AB \parallel CD$ .

**Notă:** Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ  
8 martie 2014

FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil Tehnic

CLASA A X-A

- Se consideră următoarele numere reale  $x, y \in (0,1)$ ,  $x > y$ ,  $A = \log_x(x-y)$  iar  $B = \log_y(x-y)$ .
  - Comparați numerele reale  $A$  și  $B$ .
  - Demonstrați echivalența  $x^2 + y^2 = 3xy \Leftrightarrow A + B = 2 \cdot A \cdot B$ .
- Se consideră mulțimea  $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+i| = |z-i|\}$ .
  - Să se verifice că  $z_1 = 1 \in M$ , iar  $z_2 = 3+2i \notin M$ .
  - Demonstrați că dacă  $z \in \mathbb{C}$  astfel încât  $|i \cdot z + 1| = |i \cdot z - 1|$ , atunci  $z \in M$ .
  - Demonstrați că  $M = \mathbb{R}$ .
- Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt[3]{2+x\sqrt{5}}$ .
  - Verificați că  $f(1) \cdot f(-1) \in \mathbb{Z}$ .
  - Rezolvați ecuația  $f(x) + f(-x) = \sqrt[3]{4}$ , în mulțimea numerelor reale.
  - Dați exemplu de un număr  $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  pentru care  $f(t) \in \mathbb{N}$ .
- O mașină automată ambalează zahăr în pungi de 1 Kg și apoi, cu un număr par de pungi, formează pachete identice pentru livrare. Datorită unui defect de fabricație al mașinii între pungile cu zahăr, cântărind 1kg, mai intercalează, uneori, aleator, unele pungi cântărind numai 900 g. Știind că unui magazin i-a fost livrat un pachet cu zahăr cântărind 16,8 kg, se cere:
  - Stabiliti dacă în acel pachet pot fi exact două pungi cântărind 900g.
  - Determinați numărul pungilor din pachet.

**Notă:** Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ  
8 martie 2014

FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil Tehnic

CLASA A XI-A

1. O matrice pătratică se numește **ortogonală** dacă este inversabilă, iar inversa ei coincide cu matricea transpusă.

- Demonstrați că matricea  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  este matrice ortogonală.
- Dacă  $B \in M_2(\mathbb{R})$  este o matrice ortogonală, calculați determinantul matricei  $B$ .
- Demonstrați că există o infinitate de matrice ortogonale, de ordinul al doilea.

2. Se consideră determinantul  $D(a,b) = \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a-b \end{vmatrix}$ , unde  $a, b \in \mathbb{R}$

- Verificați egalitatea  $D(a,b) = D(b,a)$ , oricare ar fi numerele reale  $a$  și  $b$ .
- Să se demonstreze că  $D(x,1) \cdot D(x,-1) = D(x^2,-1)$ , oricare ar fi numărul real  $x$ .

c) Calculați  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{D(\sqrt{x},1)}{\sqrt{D(x,1)}}$ .

3. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{e^x \cdot (1+x-e \cdot x)}{x(x+1)}$

- Verificați egalitatea  $f(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{e^{x+1}}{x+1}$ , oricare ar fi  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ .
- Determinați asimptotele verticale ale funcției.
- Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(1) + f(2) + \dots + f(n))$ .

4. Un funcționar perspicace, făcând bilanțul activității pe luna februarie 2014, la punctul de acces pe podul de la Cernavodă, a observat că seriile primei și a ultimei chitanțe, eliberate în acea lună, reprezintă cel mai mic și, respectiv, cel mai mare număr de patru cifre distincte având produsul cifrelor egal cu zero. Știind că numărul autoturismelor reprezintă 75% din numărul vehiculelor care au plătit tranzitarea, se cere:

- Câte chitanțe au fost eliberate ?
- Câte autoturisme au tranzitat podul ?
- Care este media zilnică a vehiculelor care au tranzitat podul în luna respectivă ?

**Notă:** Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ  
8 martie 2014

FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil Tehnic

CLASA A XII-A

1. Pe mulțimea  $\mathbb{R}$  a numerelor reale, se consideră legea de compoziție  $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12$ .

Fie  $M = (-\infty, 2] \cup [4, \infty)$ .

- Demonstrați că  $x \in M$  dacă și numai dacă  $|x - 3| \geq 1$ .
- Demonstrați că mulțimea  $M$  este parte stabilă a lui  $\mathbb{R}$  în raport cu legea de compoziție " $\circ$ ".
- Demonstrați că  $(M, \circ)$  este monoid comutativ.
- Determinați elementele inversabile ale monoidului.

2. În inelul matricelor  $M_2(\mathbb{Z}_6)$  se consideră matricile  $A = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{4} & \hat{5} \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} \hat{5} & \hat{5} \\ \hat{2} & \hat{2} \end{pmatrix}$  și

$E(a, b) = a \cdot A + b \cdot B$ , unde  $a, b \in \mathbb{Z}_6$ .

- Calculați  $A^2, B^2, A \cdot B$  și  $B \cdot A$ .
- Demonstrați că  $E^3(a, b) = E(a, b)$ , pentru orice  $a, b \in \mathbb{Z}_6$ .
- Câte matrice de forma  $E(a, b)$ , unde  $a, b \in \mathbb{Z}_6$ , sunt inversabile în inelul  $M_2(\mathbb{Z}_6)$  ?

3. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}, & x \geq 0 \\ \frac{e^x}{3} + a, & x < 0 \end{cases}$

- Determinați valoarea parametrului  $a$  pentru care funcția  $f$  admite primitive.
- Determinați o primitivă a restricției funcției  $f$  la intervalul  $[0, \infty)$ .
- Demonstrați că  $\int_0^4 f(x) dx \leq \frac{2}{3}$ .

4. Un maxi-taxi parcurge un traseu între două orașe. Ajuns la destinație șoferul, pasionat de matematică, observă că adunând viteza medie (km/h) cu lungimea traseului și cu durata deplasării (în ore) obține 304. Știind că toate mărimile se exprimă prin numere naturale, să se determine lungimea traseului.

**Notă:** Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.