

INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ  
8 martie 2014



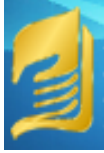
FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

## CLASA A IX-A

- În trei cutii notate A, B, C, sunt 100 de bile. Dacă numărul bilelor din cutia B diferă de numărul bilelor din cutia A cu 4, respectiv numărul bilelor din cutia C diferă de numărul bilelor din cutia A cu 3 și totodată numărul bilelor din fiecare cutie nu se divide la 3, să se afle câte bile sunt în fiecare cutie.
- Fie  $ABC$  un triunghi și punctele  $D \in (BC)$  încât  $BD = 2DC$ ,  $E \in (AB)$  încât  $AE = EB$ , respectiv  $F \in (CE)$  încât  $CF = FE$ . Se cere:
  - Arătați că  $\overline{AD} = \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{2}{3}\overline{AC}$  și  $\overline{AF} = \frac{1}{4}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AC}$ ;
  - Arătați că punctele  $A, F, D$  sunt coliniare și determinați valoarea raportului  $\frac{AF}{FD}$ .
- Se consideră mulțimea  $P$  a tuturor progresiilor aritmetice neconstante  $(a_n)_{n \geq 1}$  care au  $a_1 = 4$  și toți termenii numere naturale.
  - Arătați că toate progresiile din mulțimea  $P$  au rația număr natural nenul;
  - Determinați termenul general al acelei progresii din  $P$  în care  $a_{20} \cdot a_{14}$  are cea mai mică valoare;
  - Aflați câte progresii din mulțimea  $P$  au ca termen numărul 2014.
- O ecuație de gradul al doilea  $ax^2 + bx + c = 0$  o vom numi "perfectă" dacă  $a, b, c$  sunt numere reale nenule și oricum am schimba ordinea celor trei coeficienți  $a, b, c$ , toate ecuațiile astfel obținute au o soluție reală comună.
  - Arătați că ecuația  $x^2 - 2014x + 2013 = 0$  este perfectă;
  - Arătați că ecuația  $2013x^2 + 2014x + 1 = 0$  nu este perfectă;
  - Determinați ce condiție trebuie să verifice numerele  $a, b, c \in \mathbb{R}^*$  pentru ca ecuația  $ax^2 + bx + c = 0$  să fie perfectă.

**Notă:** Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ  
8 martie 2014



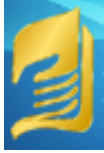
FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

## CLASA A X-A

1. Considerăm numărul complex  $z = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ .
  - a) Demonstrați că  $z^2 - z + 1 = 0$  și  $z^3 + 1 = 0$ ;
  - b) Arătați că  $z^{2014} + z$  este număr real;
  - c) Arătați că  $(1+z)(1-z^2)(1-z^{2014})(1+z^{2015})$  este număr natural pătrat perfect.
2. Sunt date 2013 greutateți marcate cu masele de 1g, 2g, ..., 2013g. Atunci:
  - a) Din greutatețile de 1g, 2g, ..., 9g formați trei grămăjoare de mase egale;
  - b) Justificați că din oricare 6 greutateți de mase  $m, m+1, m+2, m+3, m+4, m+5$  se pot forma trei grămăjoare de mase egale;
  - c) Arătați că se pot forma cu cele 2013 greutateți trei grămezi de mase egale;
  - d) Dar dacă aveți 2014 greutateți marcate cu masele de 1g, 2g, ..., 2014g, puteți forma cu ele 3 grămezi cu masele egale? Justificați răspunsul.
3. Considerăm funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} 2013-x, & x \in \mathbb{Q} \\ 2014-x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ 
  - a) Calculați  $f(2014) + f(2013 - \sqrt{2014})$ ;
  - b) Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația  $f(x) = 2014$ ;
  - c) Arătați că  $(f \circ f)(x) = x$ ,  $(\forall) x \in \mathbb{R}$
  - d) Demonstrați că  $f$  este inversabilă și determinați inversa ei.
4. 4.1 Arătați că  $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ , pentru orice numere  $a, b \in \mathbb{R}$ .  
4.2 Un melc se deplasează prin primul cadran al unui sistem de coordonate  $(xOy)$ , pe un grafic de ecuație  $y = 2^{\frac{1}{\log_2 x}}$ , cu  $x \in (1; +\infty)$ .
  - a) Arătați că  $y > 1$  și  $(\log_2 y) \cdot (\log_2 x) = 1$ ;
  - b) Arătați că  $x \cdot y \geq 4$ ;
  - c) Determinați distanța minimă de la melc până la originea  $O$  a sistemului de coordonate.

**Notă:** Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ  
8 martie 2014



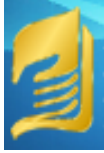
FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

## CLASA A XI-A

- Considerăm matricele  $A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ .
  - Arătați că  $C$  este inversabilă, după care calculați  $C^{-1}$  și verificați egalitatea  $A = C^{-1} \cdot B \cdot C$ ;
  - Demonstrați că  $B^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ , oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}^*$ ;
  - Calculați  $A^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- Fie  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \geq -2$ . Determinați  $a$  și  $b$  încât  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + a} - b}{x^2 + 2x - 3} = \frac{3}{16}$ .
- Fie  $a > 0$ ,  $b \in (0; 1)$  și funcția  $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{pentru } x \in [0; b] \\ a \cdot x^4, & \text{pentru } x \in (b; 1] \end{cases}$ 
  - Arătați că  $f$  are limită în  $x = b$  dacă și numai dacă  $a \cdot b = 1$ ;
  - Calculați  $L_1 = \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$  și  $L_2 = \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x > b}} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$ .
- Fie  $M_2(\mathbb{R})$  mulțimea matricelor pătrate de ordin doi și cu elemente numere reale. Arătați că:
  - $\det(X + Y) + \det(X - Y) = 2(\det X + \det Y)$ , oricare ar fi  $X, Y \in M_2(\mathbb{R})$ ;
  - Dacă  $A, B \in M_2(\mathbb{R})$  atunci sau  $\det(A + B) \geq \det A + \det B$  sau  $\det(A - B) \geq \det A + \det B$ ;
  - Andrei vrea să arate că la orice alegere de trei matrici  $A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$  poate alege semne + sau - astfel încât  $\det(A \pm B \pm C) \geq \det A + \det B + \det C$ . Aflați dacă acest lucru este posibil.  
Dacă da, considerând  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ , aflați cum trebuie să aleagă Andrei semnele + și -.

**Notă:** Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ  
8 martie 2014



FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

## CLASA A XII-A

1. Considerând inelul  $(\mathbb{Z}_{2014}; +; \cdot)$ , se cere:

- Arătați că  $\widehat{53}$  nu este inversabil;
- Arătați că  $\widehat{2011}$  este inversabil și are inversul  $\widehat{671}$ ;
- Rezolvați în  $\mathbb{Z}_{2014}$  ecuația  $\widehat{3} \cdot x + \widehat{2010} = \widehat{1}$

2. Fie funcția  $f: [-1; 3] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2e^x}, & x \in [-1; 0] \\ \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}, & x \in (0; 3] \end{cases}$

a) Arătați că  $f$  admite primitive;

b) Arătați că  $F: [-1; 3] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2e^x}, & x \in [-1; 0] \\ 2\sqrt{x+1} - 2\ln(1+\sqrt{1+x}) + 2\ln 2 - 2, & x \in (0; 3] \end{cases}$

este primitiva funcției  $f$  care se anulează în  $x=0$ ;

c) Calculați  $\int_{-1}^3 f(x) dx$

3. Pe  $\mathbb{Z}$  se consideră legea de compoziție  $x \circ y = xy - 5x - 5y + 30$ .

- Arătați că legea  $\circ$  este comutativă, asociativă și cu element neutru;
- Determinați mulțimea elementelor inversabile din  $(\mathbb{Z}; \circ)$ ;
- Pe tablă sunt scrise numerele 0, 1, 2, ..., 24. Cei 24 de elevi ai clasei trec pe rând la tablă și aleg câte 2 numere de pe tablă, le șterg și scriu pe tablă rezultatul compunerii, după legea  $\circ$ , a celor două numerele alese. Aflați ce număr va scrie pe tablă ultimul elev.

4. Fie  $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . Se cere:

- Calculați  $I_1$ ;
- Arătați că  $(n+1)I_n + I_{n+1} = e$ ,  $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$ ;
- Arătați că  $I_n$  este număr rațional numai în cazul  $n=1$ .

**Notă:** Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.