INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
8 martie 2014

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecția mediului

CLASA A IX-A

1. În trei cutii notate A, B, C, sunt 100 de bile. Dacă numărul bilelor din cutia B diferă de numărul bilelor din cutia A cu 4, respectiv numărul bilelor din cutia C diferă de numărul bilelor din cutia A cu 3 şi totodată numărul bilelor din fiecare cutie nu se divide la 3, să se afle câte bile sunt în fiecare cutie.

2. Fie ABC un triunghi şi punctele $D \in (BC)$ încât $BD = 2DC$, $E \in (AB)$ încât $AE = EB$, respectiv $F \in (CE)$ încât $CF = FE$. Se cere:
   a) Arătați că $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ şi $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$;
   b) Arătați că punctele A, F, D sunt coliniare şi determinați valoarea raportului $\frac{AF}{FD}$.

3. Se consideră mulțimea P a tuturor progresiilor aritmetice neconstante $(a_n)_{n\geq 1}$ care au $a_1 = 4$ şi toți termenii numere naturale.
   a) Arătați că toate progresiile din mulțimea P au rația număr natural nenul;
   b) Determinați termenul general al acelei progresii din P în care $a_{20} \cdot a_{14}$ are cea mai mică valoare;
   c) Aflați câte progresii din mulțimea P au ca termen numărul 2014.

4. O ecuație de gradul al doilea $ax^2 + bx + c = 0$ o vom numi ”perfectă” dacă a, b, c sunt numere reale nenule şi oricum am schimba ordinea celor trei coeficienți a, b, c, toate ecuațiile astfel obținute au o soluție reală comună.
   a) Arătați că ecuația $x^2 - 2014x + 2013 = 0$ este perfectă;
   b) Arătați că ecuația $2013x^2 + 2014x + 1 = 0$ nu este perfectă;
   c) Determinați ce condiție trebuie să verifice numerele $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ pentru ca ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ să fie perfectă.

<u>Notă:</u> *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
8 martie 2014

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecția mediului

CLASA A X-A

1. Considerăm numărul complex $z=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

   a) Demonstrați că $z^2-z+1=0$ şi $z^3+1=0$;
   b) Arătați că $z^{2014}+z$ este număr real;
   c) Arătați că $(1+z)(1-z^2)(1-z^{2014})(1+z^{2015})$ este număr natural pătrat perfect.

2. Sunt date 2013 greutăți marcate cu masele de 1g, 2g, ..., 2013g. Atunci:
   a) Din greutățile de 1g, 2g, ..., 9g formați trei grămăjoare de mase egale;
   b) Justificați că din oricare 6 greutăți de mase m, m+1, m+2, m+3, m+4, m+5 se pot forma trei grămăjoare de mase egale;
   c) Arătați că se pot forma cu cele 2013 greutăți trei grămezi de mase egale;
   d) Dar dacă aveți 2014 greutăți marcate cu masele de 1g, 2g, ..., 2014g, puteți forma cu ele 3 grămezi cu masele egale? Justificați răspunsul.

3. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2013-x, x\in\mathbb{Q}\\ 2014-x, x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$
   a) Calculați $f(2014)+f\left(2013-\sqrt{2014}\right)$;
   b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $f(x)=2014$;
   c) Arătați că $(f\circ f)(x)=x,\ (\forall)x\in\mathbb{R}$
   d) Demonstrați că f este inversabilă şi determinați inversa ei.

4. 4.1 Arătați că $ab\le\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\le\dfrac{a^2+b^2}{2}$, pentru orice numere $a, b\in\mathbb{R}$.

   4.2 Un melc se deplasează prin primul cadran al unui sistem de coordonate (xOy), pe un grafic de ecuație $y=2^{\frac{1}{\log_2 x}}$, cu $x\in(1;+\infty)$.
   a) Arătați că $y>1$ şi $(\log_2 y)\cdot(\log_2 x)=1$;
   b) Arătați că $x\cdot y\ge 4$;
   c) Determinați distanța minimă de la melc până la originea O a sistemului de coordonate.

__Notă:__ *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
8 martie 2014

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecția mediului

CLASA A XI-A

1. Considerăm matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & -6\\ 2 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

a) Arătați că C este inversabilă, după care calculați C^{-1} şi verificați egalitatea $A=C^{-1}\cdot B\cdot C$;

b) Demonstrați că $B^n=\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$;

c) Calculați A^n, $n\in\mathbb{N}^*$.

2. Fie $a, b\in\mathbb{R}$, $a\geq -2$. Determinați a şi b încât $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+a}-b}{x^2+2x-3}=\dfrac{3}{16}$.

3. Fie $a>0$, $b\in(0;1)$ şi funcția $f:[0;1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^3, & \text{pentru } x\in[0;b]\\ a\cdot x^4, & \text{pentru } x\in(b;1]\end{cases}$

a) Arătați că f are limită în $x=b$ dacă şi numai dacă $a\cdot b=1$;

b) Calculați $L_1=\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}$ şi $L_2=\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x>b}}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}$.

4. Fie $M_2(\mathbb{R})$ mulțimea matricelor pătratice de ordin doi şi cu elemente numere reale. Arătați că:

a) $\det(X+Y)+\det(X-Y)=2(\det X+\det Y)$, oricare ar fi $X, Y\in M_2(\mathbb{R})$;

b) Dacă $A, B\in M_2(\mathbb{R})$ atunci sau $\det(A+B)\geq\det A+\det B$ sau $\det(A-B)\geq\det A+\det B$;

c) Andrei vrea să arate că la orice alegere de trei matrici $A,B,C\in M_2(\mathbb{R})$ poate alege semne + sau – astfel încât $\det(A\pm B\pm C)\geq\det A+\det B+\det C$. Aflați dacă acest lucru este posibil. Dacă da, considerând $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & -5\end{pmatrix}$, aflați cum trebuie să aleagă Andrei semnele + şi –.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
8 martie 2014

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecția mediului

CLASA A XII-A

1. Considerând inelul $(\mathbb{Z}_{2014};+;\cdot)$, se cere:

a) Arătați că $\widehat{53}$ nu este inversabil;

b) Arătați că $\widehat{2011}$ este inversabil şi are inversul $\widehat{671}$;

c) Rezolvați în $\mathbb{Z}_{2014}$ ecuația $\hat{3}\cdot x+\widehat{2010}=\hat{1}$

2. Fie funcția $f:[-1;3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2e^x}, & x\in[-1;\,0]\\ \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}, & x\in(0;\,3]\end{cases}$

a) Arătați că f admite primitive;

b) Arătați că $F:[-1;3]\to\mathbb{R}$, $F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2e^x}, & x\in[-1;\,0]\\ 2\sqrt{x+1}-2\ln\left(1+\sqrt{1+x}\right)+2\ln 2-2, & x\in(0;\,3]\end{cases}$

este primitiva funcției f care se anulează în $x=0$;

c) Calculați $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$

3. Pe $\mathbb{Z}$ se consideră legea de compoziție $x\circ y=xy-5x-5y+30$.

a) Arătați că legea $\circ$ este comutativă, asociativă şi cu element neutru;

b) Determinați mulțimea elementelor inversabile din $(\mathbb{Z};\circ)$;

c) Pe tablă sunt scrise numerele $0, 1, 2, ..., 24$. Cei 24 de elevi ai clasei trec pe rând la tablă şi aleg câte 2 numere de pe tablă, le şterg şi scriu pe tablă rezultatul compunerii, după legea $\circ$, a celor două numerele alese. Aflați ce număr va scrie pe tablă ultimul elev.

4. Fie $I_n=\int_0^1 x^n e^x\,dx,\ n\in\mathbb{N}^*$. Se cere:

a) Calculați I_1;

b) Arătați că $(n+1)I_n+I_{n+1}=e,\ (\forall)n\in\mathbb{N}^*$;

c) Arătați că I_n este număr rațional numai în cazul $n=1$.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*