INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
8 martie 2014

Profil Tehnic

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

IX. OSZTÁLY

1. Tekintsük az $A=\left\{x\in\mathbb{R} / \textit{létezik } a,b\in\mathbb{Z} \textit{ úgy, hogy } x^2+ax+b=0\right\}$ halmazt.
Bizonyítsd be, hogy:
a) $1\in A$;
b) $1+\sqrt{2}\in A$;
c) $\sqrt{2}+\sqrt{3}\notin A$.

2. Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ egy függvény úgy, hogy $f(x-1)-2f(0)=2x-3$, $\forall x\in\mathbb{R}$ esetén.

a) Bizonyítsd be, hogy $f(0)=1$.

b) Bizonyítsd be, hogy $f(x)=2x+1$, $\forall x\in R$.

c) Számítsd ki az $S=\dfrac{1}{f(0)f(1)}+\dfrac{1}{f(1)f(2)}+...+\dfrac{1}{f(100)f(101)}$ összeget.

3. Tekintsük $a_1, a_2, \ldots, a_n$ szigorúan pozitív tagú valós számsorozatot, melynek tagjai egy $\boldsymbol{r}$ állandó különbségű számtani haladványban vannak.

a) Bizonyítsd be, hogy $\dfrac{1}{a_k a_{k+1}}=\dfrac{1}{r}\cdot\left(\dfrac{1}{a_k}-\dfrac{1}{a_{k+1}}\right)$, $\forall k\geq 1$.

b) Mutasd ki, hogy $S=\dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}+...+\dfrac{1}{a_{n-1}a_n}=\dfrac{n-1}{a_1a_n}$, $\forall n\geq 2$.

c) Számítsd ki az $P=\left(1-\dfrac{r^2}{a_2^{\,2}}\right)\cdot\left(1-\dfrac{r^2}{a_3^{\,2}}\right)\cdot...\cdot\left(1-\dfrac{r^2}{a_n^{\,2}}\right)$ számot.

4. Lagyen ABCD egy négyszög, M és N az AB illetve a CD oldal felezőpontja, O pedig az AC és BD átlók metszéspontja.

a) Bizonyítsd be, hogy $2\cdot\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$

b) Mutasd ki, hogy ha AB || CD akkor az M, N és O pontok kollineárisak.

c) Mutasd ki, hogy ha az M, N és O pontok kollineárisak, akkor AB || CD.

<u>Notă:</u> *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
8 martie 2014

Profil Tehnic

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

X. OSZTÁLY

1. Tekintsük a következő valós számokat $x, y \in (0,1)$, $x > y$, $A = \log_x (x-y)$ és $B = \log_y (x-y)$.

a) Hasonlítsd össze az A és B valós számokat.

b) Igazold, hogy $x^2 + y^2 = 3xy \Leftrightarrow A + B = 2 \cdot A \cdot B$.

2. Adott az $M = \{z \in C \mid \ |z+i| = |z-i|\}$ halmaz

a) Igazold, hogy $z_1 = 1 \in M$ és $z_2 = 3 + 2i \notin M$.

b) Bizonyítsd be, hogy ha $z \in C$ úgy, hogy $|i \cdot z + 1| = |i \cdot z - 1|$, akkor $z \in M$.

c) Bizonyítsd be, hogy $M = \mathbb{R}$.

3. Adott az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{2 + x\sqrt{5}}$ függvény

a) Igazold, hogy $f(1) \cdot f(-1) \in \mathbb{Z}$.

b) Oldd meg a valós számok halmazában az $f(x) + f(-x) = \sqrt[3]{4}$ egyenletet.

c) Adj példát olyan $t \in R \setminus Q$ számra, amelyre $f(t) \in \mathbb{N}$.

4. Egy csomagoló automata cukrot csomagol 1 kg-os tasakokba, majd a szállításhoz olyan egyforma csomagokat készít, amelyekben páros számú tasak van. Egy gyártási hiba miatt a gép néha véletlenszerűen 1 kg helyett csak 900 g cukrot mér a tasakba. Egy üzletbe egy 16,8 kg-os csomagot szállítottak.

a) Lehet-e ebben a csomagban pontosan két 900 grammos tasak?

b) Hány zacskó tasak volt a csomagban?

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
8 martie 2014

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil tehnic

XI. OSZTÁLY

1. Egy négyzetes mátrixot ***ortogonálisnak*** nevezünk, ha invertálható és az inverze egyenlő a transzponáltjával.

a) Bizonyítsd be, hogy az $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ matrix ortogonális.

b) Ha $B\in M_2(R)$ egy ortogonális mátrix határozd meg a B matrix determinánsát.

c) Bizonyítsd be, hogy végtelenül sok ortogonális másodrendű négyzetes mátrix van.

2. Adott a $D(a,b)=\begin{vmatrix}a & b\\ -b & a-b\end{vmatrix}$ determináns, ahol $a,b\in R$

a) Bizonyítsd be, hogy $D(a,b)=D(b,a)$, bármely a és b valós szám esetén.

b) Bizonyítsd be, hogy $D(x,1)\cdot D(x,-1)=D(x^2,-1)$, bármely valós x esetén.

c) Számítsd ki: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{D\left(\sqrt{x},1\right)}{\sqrt{D(x,1)}}$.

3. Adott az $f:R\setminus\{-1,0\}\to R,\ f(x)=\dfrac{e^x\cdot(1+x-e\cdot x)}{x(x+1)}$ függvény

a) Bizonyítsd be, hogy $f(x)=\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{e^{x+1}}{x+1}$, bármely $x\in R\setminus\{-1,0\}$ esetén.

b) Határozd meg a függvény függőleges aszimptotáit.

c) Számítsd ki: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(1)+f(2)+...+f(n)\right)$.

4. Egy figyelmes hivatalnok a cernavodai híd belépőkapujánál végzett tevékenységek havi mérlegét készíti 2014 február hónapra. Észreveszi, hogy az első és az utólsó számlának a száma a legkisebb illetve a legnagyobb olyan négyjegyű szám amelyeknek a számjegyei különböznek és számjegyeik szorzata 0.

Tudva, hogy a személygépkocsik száma 75%-a az összes jármű számának, amelyek fizettek az áthaladásért, számítsd ki:

a) Hány számlát adtak ki?

b) Hány személygépkocsi haladt át a hídon?

c) Naponta átlag hány jármű haladt át a hídon az adott hónapban ?

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "*ADOLF HAIMOVICI*"

ETAPA JUDEŢEANĂ
8 martie 2014

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil Tehnic

XII. OSZTÁLY

1. A valós számok R halmazán értelmezzük az $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12$ műveletet. Legyen $M = (-\infty, 2] \cup [4, \infty)$.

a) Bizonyítsd be, hogy $x \in M$ akkor és csak akkor, ha $|x-3| \geq 1$.
b) Bizonyítsd be, hogy az M halmaz stabil részhalmaza R-nek a "$\circ$" műveletre vonatkozóan.
c) Bizonyítsd be, hogy $(M, \circ)$ kommutatív monoid.
d) Határozd meg a monoid invertálható elemeit.

2. Az $M_2(Z_6)$ gyűrűben tekintsük az $A = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{4} & \hat{5} \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} \hat{5} & \hat{5} \\ \hat{2} & \hat{2} \end{pmatrix}$ mátrixokat és legyen $E(a,b) = a \cdot A + b \cdot B$, ahol a , $b \in \mathbb{Z}_6$.

a) Számítsd ki az $A^2, B^2, A \cdot B$ és $B \cdot A$ mátrixokat.
b) Bizonyítsd be, hogy $E^3(a,b) = E(a,b)$, bármely $a,b \in Z_6$ esetén.
c) Az $M_2(Z_6)$ gyűrű hány $E(a,b)$, a , $b \in \mathbb{Z}_6$ alakú mátrixa invertálható?

3. Adott az $f: R \to R,\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}, x \geq 0 \\ \dfrac{e^x}{3} + a, x < 0 \end{cases}$ függvény.

a) Határozd meg az $\boldsymbol{a}$ parameter értékét úgy, hogy az f függvénynek legyen primitív függvénye.
b) Határozd meg az f függvény $[0, \infty)$ intervallumra való leszűkítésének egy primitív függvényét.
c) Bizonyítsd be, hogy $\int_0^4 f(x)dx \leq \dfrac{2}{3}$.

4. Egy maxi-taxi két város között közlekedik. Ahogy megérkezik a rendeltetési helyre a matematikát kedvelő sofőr észreveszi, hogy az átlagsebességnek (km/h), az útvonal hosszának és az utazási időnek (órákban kifejezve) az összege 304. Tudva, hogy az értékek természetes számokkal vannak kifejezve, határozd meg az útvonal hosszát.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*