INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEŢEANĂ
8 martie 2014

Profil Tehnic

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

BAREM CORECTARE
CLASA A IX-A

1.

a) 1 verifică ecuaţia x^2-x =0, deci $1\in$ A…………………………………………….. 1p

b) 1+$\sqrt{2}$ verifică ecuaţia x^2-2x-1=0, deci $1+\sqrt{2}\in A$………………………………… 2p

c) Dacă, prin reducere la absurd, $\sqrt{2}+\sqrt{3}\in A$, atunci $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2+a\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+b=0$…1p

Găsim $\sqrt{6}$ $(2a^2-4b-20)=(b+5)^2+24-5a^2$…………………………………………………………1p

Dacă $2a^2-4b-20\neq 0$, atunci $\sqrt{6}=\dfrac{(b+5)^2+24-5a^2}{2a^2-4b-20}$, fals…………………………….……1p

Urmează că $2a^2-4b-20=0$ şi $(b+5)^2+24-5a^2=0$, de unde găsim b=1 şi $a^2=12$ sau b=-1 şi $a^2=8$, ceea ce nu convine……………………………………………………………….................1p

2. a) Dacă x=1 obţinem f(0)=1…………………………………………………………2p

b) Notăm x-1=t şi găsim f(t)=2t+1…………………………………………………2p

c) Avem: S= $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+...+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{201}-\frac{1}{203}\right)$………………………........2p

Obţinem S=$\dfrac{101}{203}$ ………………………………………………………………………1p

3. a) Calcul…………………………………………………………………………1p

b) Folosind relaţia de la a) avem S=$\frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+...+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n}\right)$…………………2p

Deducem că S=$\dfrac{n-1}{a_1a_n}$ ……………………………………………………………1p

c) Deoarece $1-\dfrac{r^2}{a_k^{\ 2}}=\dfrac{a_{k-1}a_{k+1}}{a_k^{\ 2}}$ ………………………………………………………1p

Obţinem P=$\dfrac{a_1a_3}{a_2^{\ 2}}\cdot\dfrac{a_2a_4}{a_3^{\ 2}}\cdot...\cdot\dfrac{a_{n-1}a_{n+1}}{a_n^{\ 2}}$ ……………………………………………………..1p

sau P=$\dfrac{a_1a_{n+1}}{a_2a_n}$ …………………………………………………………………………..1p

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

4. a) Avem $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}$ si prin adunare obtinem relatia respectiva..1p

b)Analog, $2\cdot\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{0C}+\overrightarrow{OD}$…………………………………………………………1p

Din asemănarea triunghiurilor COD şi AOB avem $OC=kOA$ şi $OD=kOB$, unde

$k=\dfrac{CD}{AB}$ ……………………………………………………………………………...1p

Obţinem $\overrightarrow{OM}=-k\cdot\overrightarrow{ON}$, deci punctele M, N şi O sunt coliniare…………………………1p

c) Fie E punctul de intersecţie al dreptelor MN şi AD.

Aplicând teorema lui Menelaus în triunghiul ABD şi transversala M-O-E, avem

$\dfrac{AM}{MB}\cdot\dfrac{OB}{OD}\cdot\dfrac{ED}{EA}=1,\ sau\ \dfrac{OB}{OD}=\dfrac{EA}{ED}$ (1)………………………………………………..………1p

Analog pentru triunghiul ACD şi transversala O-N-E obţinem $\dfrac{OA}{OC}=\dfrac{EA}{ED}$ (2)……..…….1p

Din (1) şi (2) avem $\dfrac{OA}{OC}=\dfrac{OB}{OD}$, deci CD||AB……………………………………………1p

BAREM DE CORECTARE - CLASA A X-A

1. a) Obţine $x > y \Leftrightarrow \frac{1}{A} < \frac{1}{B}$ 2p

   Finalizare A>B 1p

   b) Observă $A+B=2AB \Leftrightarrow \frac{1}{A}+\frac{1}{B}=2$ 2p

   Finalizare $\frac{1}{A}+\frac{1}{B}=2 \Leftrightarrow \log_{x-y}(xy)=2 \Leftrightarrow \log_{x-y}(x-y)^2=\log_{x-y}(xy) \Leftrightarrow x^2+y^2=3xy$ ..2p

2.

a) Verifică $|z_1+i|=|z_1-i|$, deci $z_1=1\in M$ 1p

   Verifică $|z_2+i|\neq|z_2-i|$, deci $z_2\notin M$ 1p

b) Observă $|i\cdot z+1|=|i(z-i)|=|i|\cdot|z-i|=|z-i|$ 1p

   $|i\cdot z-1|=|i(z+i)|=|i|\cdot|z+i|=|z+i|$ 1p

   Finalizare $|i\cdot z+1|=|i\cdot z-1| \Leftrightarrow |z+i|=|z-i|$, deci $z\in M$ 1p

c) Verificăm $M\subset\mathbb{R}$ şi $\mathbb{R}\subset M$

   Dacă $z=a+bi\in M \to |a+i(b+1)|=|a+i(b-1)|$, deci b=0 iar $z\in R$ 1p

   Dacă $z=t\in R$, atunci $|t+i|=|t-i|$ este adevarată , deci $z\in M$ 1p

3.

a) Obţine $f(1)\cdot f(-1)=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=-1$ 2p

b) Obţine $\sqrt[3]{2+x\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-x\sqrt{5}}=\sqrt[3]{4}$ 1p

   Prin ridicare la puterea a treia obţine

   $4+3\cdot\sqrt[3]{4-5x^2}\cdot\sqrt[3]{4}=4$ 1p

   Finalizare : $x=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$ 1p

c) De exemplu $t=5\sqrt{5}\in R\setminus Q$ iar $f(t)=3\in N$ 2p

4. Fie ***x*** este numărul pungilor de 1kg

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

y este numărul pungilor de 900 g

Atunci $x+y=2n$ (număr par) şi $1000x+900y=16800$ 2p

a) Dacă y=2 , atunci x=15 iar x+y = 17 , nu convine 2p

b) Obţine y=12 , x= 6 , deci în pachet sunt 18 pungi 3p

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
8 martie 2014

Profil Tehnic

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

BAREM DE CORECTARE
CLASA A XI-A

1.

a) Verifică $A \cdot A^T = I_2$, deci A este ortogonală 2p

b) Admitem că matricea B este ortogonală .

Atunci $B \cdot B^T = I_2 \Leftrightarrow \det\left(B \cdot B^T\right) = 1 \Leftrightarrow \det(B) = \pm 1$ 2p

c) Un exemplu îl constituie matricea $A = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, t \in R$ 2p

Verificare: $\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} = I_2$ 1p

2.

a) Obţine $D(a,b) = \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a-b \end{vmatrix} = a^2 - a \cdot b + b^2$ 1p

Verifică $D(b,a) = b^2 - ba + a^2 = D(a,b)$ 1p

b) Obţine $D(x,1) \cdot D(x,-1) = \left(x^2 - x + 1\right) \cdot \left(x^2 + x + 1\right) = x^4 + x^2 + 1$ 2p

Obţine $D(x^2,-1) = x^4 + x^2 + 1$, deci relaţia este adevarată 1p

c) Obţine $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{D\left(\sqrt{x},1\right)}{\sqrt{D(x,1)}} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$ 1p

Finalizare $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x^2 - x + 1}} = 1$ 1p

3.

a) Verifică egalitatea $\frac{e^x}{x} - \frac{e^{x+1}}{x+1} = \frac{e^x \cdot (1 + x - e \cdot x)}{x(x+1)}$ 2p

b) Studiem asimptotele verticale în $x_0 = 0$

$$\lim_{x \nearrow 0} \left(\frac{e^x}{x} - \frac{e^{x+1}}{x+1} \right) = -\infty, \lim_{x \searrow 0} \left(\frac{e^x}{x} - \frac{e^{x+1}}{x+1} \right) = +\infty$$

Aşadar $x = 0$ este asimptotă verticală pentru graficul funcţiei 1p

Studiem asimptotele verticale în $x_0 = -1$

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

$$\lim_{x\nearrow -1}\left(\frac{e^x}{x}-\frac{e^{x+1}}{x+1}\right)=+\infty,\ \lim_{x\searrow -1}\left(\frac{e^x}{x}-\frac{e^{x+1}}{x+1}\right)=-\infty$$

Aşadar $x=-1$ este asimptotă verticală pentru graficul funcţiei …………1p

c) Scrie $f(1)+f(2)+...+f(n)=\left(\frac{e}{1}-\frac{e^2}{2}\right)+\left(\frac{e^2}{2}-\frac{e^3}{3}\right)+...+\left(\frac{e^n}{n}-\frac{e^{n+1}}{n+1}\right)$ ….1p

Obţine $f(1)+f(2)+...+f(n)=\left(e-\frac{e^{n+1}}{n+1}\right)$ ………………………………..1p

Finalizare $\lim_{n\to\infty}\left(f(1)+f(2)+...+f(n)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(e-\frac{e^{n+1}}{n+1}\right)=-\infty$ …………..1p

4.

a) Seria primei chitanţe este 1023 iar a ultimei chitanţe 9870…………………2p
Au fost eliberate 9870-1022=8848 chitanţe ………………………………...1p

b) Obţine numărul autoturismelor $75\%\cdot 8848=6636$ …………………………..2p

c) Media zilnică este $8848:28=316$ autovehicule……………………………..2p

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
8 martie 2014

Profil Tehnic

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

BAREM DE CORECTARE
CLASA A XII-A

1.

a) Demonstrează echivalenţa
$x\in M \Leftrightarrow |x-3|\geq 1$ ……………………………………………………………..1p

b) Pentru $x,y\in M \Rightarrow |x-3|\cdot|y-3|\geq 1 \Rightarrow xy-3x-3y+9\leq -1$ sau $xy-3x-3y+9\geq 1$, deci $xy-3x-3y+12\leq 2$ sau $xy-3x-3y+12\geq 4$, adica $x\circ y\in M$ …………………1p

c) Scrierea corectă şi verificarea fiecareia dintre cele trei axiome câte 1p ………...3p

d) Scrie $U(M)=\{x\in M \mid \exists x'\in M \quad a.\ i.\ \ x\circ x'=4\}$

Obţine $x'=3+\dfrac{1}{x-3}$ … ……………………………………………………….....1p

Din condiţia $x'\in M$ obţine $U(M)=\{2,4\}$. ………………………………………..…..1p

2.

a) Obţine $A^2=A$, $B^2=B$, $A\cdot B=O_2$, $B\cdot A=O_2$ …………………………………......2p

b) Obţine $E^3(a,b)=a^3\cdot A+b^3\cdot B$ ..…………………………………………......1p

Demonstrează $x^3=x$, pentru orice $x\in Z_6$ …………………………………...1p

Finalizare $E^3(a,b)=E(a,b)$ … ……………………………………….…1p

c) Scrie $E(a,b)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det(\mathrm{E}(a,b))\in U(Z_6)=\{\hat{1},\hat{5}\}$ ………….........1p

Finalizare : $\det(E(a,b))=a\cdot b\in\{\hat{1},\hat{5}\}$, $(a,b)\in\{(\hat{1},\hat{1}),(\hat{1},\hat{5}),(\hat{5},\hat{1}),(\hat{5},\hat{5})\}$ …1p

3.

a) Calculează $f(0)=\dfrac{1}{6}, \lim\limits_{x\searrow 0} f(x)=\dfrac{1}{6}, \lim\limits_{x\nearrow 0} f(x)=\dfrac{1}{3}+a$ …………………………......1 p

Dacă $a=-\dfrac{1}{6}$, atunci funcţia este continuă în $x_0=0$, deci este continuă pe R şi admite primitive ……………………………………………………………..1p

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

b) Din relaţia $\frac{1}{(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)}=\frac{m}{(x+1)}+\frac{n}{(x+2)}+\frac{p}{(x+3)}$

obţine $m=-\frac{1}{2}, n=1, p=-\frac{1}{2}$ 2p

O primitivă este

$F(x)=-\frac{1}{2}\ln(x+1)+\ln(x+2)-\frac{1}{2}\ln(x+3)$ 1p

c) Deoarece $x\in[0,4]$ rezultă că $(x+1)(x+2)(x+3)\geq 6$, deci $f(x)\leq\frac{1}{6}$ 1p

Prin integrarea relaţiei $f(x)\leq\frac{1}{6}$ se obţine $\int_0^4 f(x)dx\leq\frac{2}{3}$ 1p

4.

Notăm cu l- lungimea traseului (în km)
v- viteza medie de deplasare (km/h)
t- durata deplasării (h)

Scrie $l+v+t=304\Leftrightarrow v\cdot t+v+t=304$, iar l, v, t- numere naturale........................ .. 2p

Obţine $(v+1)\cdot(t+1)=305$ 2p

Numai soluţia t=4, v= 60 convine 1p

Finalizare : $l=v\cdot t=240km$ 2p