INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
8 martie 2014

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiințele naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A IX-A

1. Două autovehicule A şi B pornesc simultan din acelaşi punct M şi se deplasează pe aceeaşi direcție şi în acelaşi sens cu vitezele constante v_1 şi v_2 ($v_1 < v_2$), descriind un drum rectiliniu d. Fie P un punct care nu aparține dreptei d, astfel încât PM = a şi $m(\sphericalangle PMA) > 90°$. După cât timp de la pornire unghiul $\sphericalangle APB$, sub care se văd autovehiculele din punctul P, este maxim?

Soluție.

Fie $PO \perp d$; notăm PO = h, OM = b, $m(\sphericalangle OPA) = \alpha$, $m(\sphericalangle OPB) = \beta$ şi $m(\sphericalangle APB) = \gamma$. Observăm că $h^2 + b^2 = a^2$. După timpul t de la pornire, $MA = v_1 t$ şi $MB = v_2 t$ 1p

$\mathrm{tg}\gamma = \mathrm{tg}(\beta - \alpha) = \dfrac{\mathrm{tg}\beta - \mathrm{tg}\alpha}{1 + \mathrm{tg}\beta\,\mathrm{tg}\alpha}$ 1p

$\mathrm{tg}\beta = \dfrac{b + v_2 t}{h}$, $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{b + v_1 t}{h}$ 1p

Înlocuind, obținem $\mathrm{tg}\gamma = \dfrac{h(v_2 - v_1)}{\dfrac{a^2}{t} + v_1 v_2 t + b(v_1 + v_2)}$ 2p

Unghiul γ este maxim dacă numitorul este minim, deci când $\dfrac{a^2}{t} + v_1 v_2 t$ este minim ($b(v_1 + v_2)$ este constant) 1p

Folosind inegalitatea mediilor, deducem că $\dfrac{\dfrac{a^2}{t} + v_1 v_2 t}{2} \geq \sqrt{\dfrac{a^2}{t} \cdot v_1 v_2 t}$. Astfel, valoarea minimă se obține când $\dfrac{a^2}{t} = v_1 v_2 t$, deci pentru $t = \dfrac{a}{\sqrt{v_1 v_2}}$ 1p

2. Calculați suma $S = \left[\dfrac{1^2}{2}\right] + 2^1 \cdot \left[\dfrac{2^2}{3}\right] + 2^2 \cdot \left[\dfrac{3^2}{4}\right] + \ldots + 2^{2013} \cdot \left[\dfrac{2014^2}{2015}\right]$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real x.

Soluție.

$\left[\dfrac{n^2}{n+1}\right] = \left[\dfrac{n^2 - 1 + 1}{n+1}\right] = \left[n - 1 + \dfrac{1}{n+1}\right] = n - 1$ 2p

$S = 0 + 2^1 \cdot 1 + 2^2 \cdot 2 + 2^3 \cdot 3 + \ldots + 2^{2013} \cdot 2013$ 1p

$S-\dfrac{S}{2}=2^{2013}\cdot 2013-\left(1+2+2^2+2^3+...+2^{2012}\right)$ 2p

$S=2\cdot\left(2^{2013}\cdot 2013-\dfrac{2^{2013}-1}{2-1}\right)$ 1p

$S=2\cdot\left(2^{2013}\cdot 2012+1\right)$ 1p

3. Determinați funcția $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$, știind că $1^2 f(1)+2^2 f(2)+...+n^2 f(n)=\dfrac{n^2\left(f(n)+1\right)^2}{4}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

Gazeta Matematică 11/2013

<u>Soluție.</u>

Pentru n = 1 se obține că $f(1)=1$ 1p

Dând în continuare valori lui n, intuim că $f(n)=n$ 2p

Presupunerea precedentă se demonstrează prin inducție 4p

4. Fie ΔABC şi $A_1\in(BC)$, $B_1\in(CA)$, $C_1\in(AB)$, astfel încât $\dfrac{BA_1}{BC}=\dfrac{CB_1}{CA}=\dfrac{AC_1}{AB}=\dfrac{1}{n}$, $n>2$, $AA_1\cap BB_1=\{B'\}$, $BB_1\cap CC_1=\{C'\}$, $CC_1\cap AA_1=\{A'\}$. Aflați raportul $\dfrac{S_{\Delta A'B'C'}}{S_{\Delta ABC}}$.

Sergiu Prisacariu

<u>Soluție.</u>

$\dfrac{CA_1}{BC}=\dfrac{n-1}{n}\Rightarrow\dfrac{S_{\Delta AA_1C}}{S_{\Delta ABC}}=\dfrac{n-1}{n}$ (1) 2p

Aplicăm teorema lui Menelaus în ΔABA_1 cu punctele coliniare C_1, A', C; rezultă că

$\dfrac{C_1A}{C_1B}\cdot\dfrac{CB}{CA_1}\cdot\dfrac{A'A_1}{A'A}=1$ 1p

Obținem $\dfrac{A'A}{AA_1}=\dfrac{n}{n^2-n+1}$ şi $\dfrac{S_{\Delta ACA'}}{S_{\Delta AA_1C}}=\dfrac{n}{n^2-n+1}$ (2) 2p

Din (1) şi (2), $\dfrac{S_{\Delta ACA'}}{S_{\Delta ABC}}=\dfrac{n-1}{n^2-n+1}$ şi analoagele $\dfrac{S_{\Delta CBC'}}{S_{\Delta ABC}}=\dfrac{n-1}{n^2-n+1}$, $\dfrac{S_{\Delta BAB'}}{S_{\Delta ABC}}=\dfrac{n-1}{n^2-n+1}$ 1p

Finalizare: $\dfrac{S_{\Delta A'B'C'}}{S_{\Delta ABC}}=\dfrac{(n-2)^2}{n^2-n+1}$ 1p

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
8 martie 2014

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A X-A

1. Se consideră numerele complexe a, b, c şi d, astfel încât $a + b = c + d$ şi $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$. Arătaţi că $a^n + b^n = c^n + d^n$, oricare ar fi numărul natural n.

Soluţie.
Din $(a + b)^2 = (c + d)^2$ şi $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ obţinem, scăzând membru cu membru, că $a \cdot b = c \cdot d$
.... 2p
Notăm $s = a + b = c + d$ şi $p = a \cdot b = c \cdot d$; atunci ecuaţia $x^2 - sx + p = 0$ are, pe de o parte, soluţiile a şi b, iar pe de altă parte, soluţiile c şi d. Rezultă $a = c$, $b = d$ sau $a = d$, $b = c$
.... 4p
Astfel, $a^n + b^n = c^n + d^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ 1p

2. Determinaţi numerele reale x cu proprietatea că $[\log_2 x] + [\log_4 x] = 3$ (unde [a] este partea întreagă a numărului real a).

Gazeta Matematică 1/2014

Soluţie.
Impunem condiţia $x \in (0, \infty)$. Dacă $x \in (0, 1)$, atunci cei doi termeni ai sumei din membrul stâng sunt negativi, deci nu există soluţii în (0, 1) 2p
Deci $[\log_2 x]$ şi $[\log_4 x]$ sunt numere naturale şi $[\log_2 x] \geq [\log_4 x]$. Avem astfel doar posibilităţile $([\log_2 x], [\log_4 x]) \in \{(2,1); (3,0)\}$ 3p
În primul caz, $x \in [4,8) \cap [4,16) = [4;8)$. În cel de-al doilea, $x \in [8,16) \cap [1,4) = \varnothing$. În concluzie, numerele căutate sunt cele din intervalul $[4,8)$ 2p

3. Se consideră numerele pozitive a, b, c şi funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$. Fie u, v, w numere reale astfel încât $0 \leq u < v < w$ şi punctele $U(u, f(u)), V(v, f(v))$ şi $W(w, f(w))$. Demonstraţi că $UW^2 > UV^2 + VW^2$.

Mihai Monea

Soluţie.
Folosind teorema cosinusului, concluzia problemei revine la a demonstra faptul că $\sphericalangle UVW$ este obtuz 2p
Cum a, b, c sunt pozitive, parabola asociată funcţiei f are vârful la stânga axei Oy şi f este strict crescătoare pe intervalul $[0, \infty)$ 2p

Ducem prin V paralele la axele de coordonate, care vor împărţi planul în patru cadrane. Punctele U şi W se vor afla în cadranul III şi respectiv I, ceea ce arată că unghiul $\sphericalangle UVW$ este obtuz 3p

4. Prin înfăşurarea unui dreptunghi de perimetru 1 se obține suprafața laterală a unui cilindru. Determinați volumul maxim posibil al acestui cilindru şi precizați dimensiunile dreptunghiului pentru care se atinge acest maxim.
Notă: Volumul unui cilindru circular drept având raza R şi înălțimea H se calculează folosind formula $V = \pi R^2 H$.

<u>Soluție.</u>

Fie a şi b dimensiunile dreptunghiului, cu $a + b = \frac{1}{2}$. Dacă înălțimea cilindrului este a, raza acestuia va fi $\frac{b}{2\pi}$, iar volumul va fi egal cu $V = \frac{1}{4\pi} ab^2$ 3p

Din inegalitatea mediilor obținem că $V = \frac{1}{\pi} \cdot a \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2} \le \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{a + \frac{b}{2} + \frac{b}{2}}{3} \right)^3 = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^3 = \frac{1}{216\pi}$

.... 3p

Deducem că $V_{max} = \frac{1}{216\pi}$, valoarea maximă atingându-se când $a = \frac{1}{6}, b = \frac{1}{3}$ iar înfăşurarea se face astfel încât înălțimea să fie de lungime a 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
8 martie 2014

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiințele naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XI-A

1. Determinați asimptotele graficului funcției $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{x}}$.

Soluție.

Cum $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x \cdot e^{-\frac{1}{x}} = \infty,$ funcția f nu are asimptotă orizontală la $+\infty$

.... 1p

Căutăm asimptota oblică la $+\infty$.

Avem: $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1;$ $n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to\infty} x\left(e^{-\frac{1}{x}} - 1\right) = \lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} \frac{e^{-y} - 1}{y} = -1,$ deci

dreapta y = x – 1 este asimptotă oblică spre $+\infty$ la G_f 2p

Analog, dreapta y = x – 1 este asimptotă oblică şi spre $-\infty$ la graficul lui f

.... 1p

Deoarece $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} xe^{-\frac{1}{x}} = 0; \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} xe^{-\frac{1}{x}} = \lim_{y\to-\infty} \frac{e^{-y}}{y} = -\infty$, dreapta x = 0 este asimptotă verticală la stânga la G_f 3p

2. Fie A o matrice pătratică de ordin 3 cu elemente numere întregi. Demonstrați că matricea $3A + 5I_3$ este inversabilă.

Supliment Gazeta Matematică 9/2013

Soluție.

Determinatul matricei $3A + 5I_3$ este de forma $\Delta = \begin{vmatrix} M_3 + 2 & M_3 & M_3 \\ M_3 & M_3 + 2 & M_3 \\ M_3 & M_3 & M_3 + 2 \end{vmatrix}$

.... 4p

Efectuând calculele, obținem că $\Delta = M_3 + 2$, deci $\Delta \neq 0$. Deducem că matricea $3A + 5I_3$ este inversabilă. 3p

3. Folosind noțiunea de limită a unei funcții într-un punct, demonstrați că funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ nu este funcție rațională.

Notă: O funcție se numeşte *rațională* dacă se poate scrie ca raport a două funcții polinomiale.

Supliment Gazeta Matematică 1/2014

Soluție.

Presupunem, prin absurd, că există P şi Q polinoame cu coeficienți reali astfel încât $\sin x = \frac{P(x)}{Q(x)}, \forall x \in \mathbb{R}$. Observăm că limita $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ există în $\overline{\mathbb{R}}$,

.... 4p

în timp ce funcția f(x) = sinx nu are limită la +∞, fiind periodică. Contradicția la care am ajuns arată că presupunerea făcută este falsă 3p

4. O echipă de hochei este formată din 6 titulari şi 9 rezerve. Antrenorul poate face schimbări oricând, oricâte şi poate schimba oricare jucător; un jucător schimbat poate reveni în joc după un timp. Timpul efectiv de joc este de 60 minute. Într-o anumită partidă, se constată la final că fiecare dintre cei 15 componenți ai echipei a jucat un acelaşi număr n de minute.

a) Determinați valoarea lui n.

b) Descrieți, folosind o matrice pătratică ce are ca elemente doar numerele 0 şi 1, o modalitate în care antrenorul poate trimite în teren jucătorii astfel încât să fie respectate condițiile problemei.

Soluție.

a) În fiecare moment, pe teren sunt 6 jucători. Timpul total pe care îl joacă cei aflați pe teren este deci 6×60 = 360 min. Cum fiecare joacă acelaşi număr de minute, rezultă că $n = 360 : 15 = 24$ min.

.... 4p

b) Împărțim cei 15 jucători în cinci grupe de câte 3, pe care le vom nota L_1, L_2, L_3, L_5, L_5. În matricea următoare cifra 1 arată că o anumită grupă se află pe teren în intervalul de timp corespunzător, iar cifra 0 arată că respectiva grupă este pe bancă de rezerve:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{c|c|c|c|c} 0\ldots12 & 12\ldots24 & 24..36 & 36\ldots48 & 48\ldots60 \end{array} \\ \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

.... 3p

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
8 martie 2014

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XII-A

1. Fie a > 0 şi funcţiile f, g, G : [1, ∞) →ℝ, $f(x)=\dfrac{1}{x(3+\ln x)(5+\ln x)}$, $g(x)=\dfrac{1}{x(a+\ln x)}$, $G(x)=\ln(a+\ln x)$.

a) Arătaţi că G este o primitivă a lui g pe intervalul [1, +∞).

b) Determinaţi o primitivă F a funcţiei f pe intervalul [1, ∞) cu proprietatea $F(e^2)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{7}$.

Supliment Gazeta Matematică 12/2013

Soluţie.

a) $G'(x)=g(x), \forall x\in[1,\infty) \Rightarrow$ G este o primitivă a lui g 3p

b) $f(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{x(3+\ln x)}-\dfrac{1}{x(5+\ln x)}\right)$ 1p

$$\int f(x)dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x(3+\ln x)}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x(5+\ln x)}dx=\frac{1}{2}\ln(3+\ln x)-\frac{1}{2}\ln(5+\ln x)+\mathcal{C}=$$

$=\ln\sqrt{\dfrac{3+\ln x}{5+\ln x}}+\mathcal{C}$ 2p

Aflarea primitivei F cu proprietăţile din enunţ 1p

2. Pe ℤ definim legea de compoziţie "∘" dată prin $x\circ y = 5xy + 5(x + y) + 4$, $\forall x, y\in\mathbb{Z}$.

a) Cercetaţi dacă legea "∘" este asociativă.

b) Aflaţi ultimele 100 cifre din scrierea zecimală a numărului întreg $1\circ2\circ3\circ4\circ\ldots\circ2013\circ2014$.

Soluţie.

a) Verificarea asociativităţii 3p

b) $x\circ y =5(x + 1)(y + 1) - 1$, $\forall x, y\in\mathbb{Z}$ 1p

Deducerea egalităţii $x_1\circ x_2\circ\ldots\circ x_n = 5^{n-1}(x_1 + 1)(x_2 + 1)\ldots(x_n + 1) - 1$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ şi $\forall x_1, x_2, \ldots x_n\in\mathbb{Z}$
.... 2p

$1\circ2\circ3\circ4\circ\ldots\circ2013\circ2014 = 5^{2013}\cdot2015! - 1$ şi deducem că ultimele 100 de cifre sunt toate egale cu 9
.... 1p

3. Fie grupul $\left(\mathbb{Z}_p^*, \cdot\right)$. Pentru un element $\hat{a} \in \mathbb{Z}_p^*$, definim funcția :

$\psi : \mathbb{Z}_p^* \to \mathbb{Z}_p^*, \Psi\left(\hat{x}\right) = \hat{a} \cdot \hat{x}, \forall \hat{x} \in \mathbb{Z}_p^*$; (p număr prim).

a) Arătați că ψ este bijecție.

b) Demonstrați egalitatea $\hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \hat{3} \cdot \ldots \cdot \widehat{p-1} = \Psi\left(\hat{1}\right) \cdot \Psi\left(\hat{2}\right) \cdot \ldots \cdot \Psi\left(\widehat{p-1}\right)$.

c) Justificați că $\hat{a}^{p-1} = \hat{1}$.

d) Argumentați că $2017 \mid \left(\sum_{i=1}^{2016} C_{2017}^i\right)$.

Soluție.

a) Suficientă verificarea injectivității: $\Psi\left(\widehat{x_1}\right) = \Psi\left(\widehat{x_2}\right) \Rightarrow \widehat{x_1} = \widehat{x_2}$ 1p

b) Deduce egalitatea cerută folosind bijectivitatea lui Ψ 2p

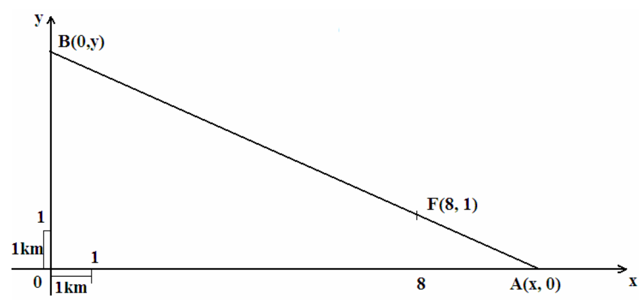
c) $\hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \hat{3} \cdot \ldots \cdot \widehat{p-1} = \Psi\left(\hat{1}\right) \cdot \Psi\left(\hat{2}\right) \cdot \ldots \cdot \Psi\left(\widehat{p-1}\right) \Rightarrow \hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \hat{3} \cdot \ldots \cdot \widehat{p-1} = \hat{a} \cdot \hat{1} \cdot \hat{a} \cdot \hat{2} \cdot \hat{a} \cdot \hat{3} \cdot \ldots \cdot \hat{a} \cdot \widehat{p-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \hat{3} \cdot \ldots \cdot \widehat{p-1} = \hat{a}^{p-1} \cdot \hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \hat{3} \cdot \ldots \cdot \widehat{p-1} \Rightarrow \hat{a}^{p-1} = \hat{1}$ 2p

d) $\sum_{i=1}^{2016} C_{2017}^i = 2^{2017} - C_{2017}^0 - C_{2017}^{2017} = 2 \cdot \left(2^{2016} - 1\right)$ 1p

Dar $2^{2016} - 1 = 2^{2017-1} - 1 \,\vdots\, 2017$ (conform punctului c) şi deoarece 2017 este prim. 1p

4. O fabrică F(8, 1) se află poziționată între două şosele perpendiculare Ox şi Oy, ca în desenul alăturat. Se construieşte o şosea rectilinie care să unească fabrica cu cele două şosele, astfel încât aceasta să fie de cost minim, adică lungimea FA + FB = AB să fie minimă. Aflați lungimea şoselei AB de cost minim.



Soluție.

Din condiția de coliniaritate a punctelor A(x, 0); F(8, 1) şi B(0, y) deducem că $y = \frac{x}{x-8}$;

(x > 8, y > 1) 2p

$FA + FB = \sqrt{(x-8)^2 + 1} + \sqrt{64 + (y-1)^2}$, unde x > 8, y > 1 .... 1p

$AB = FA + FB = \sqrt{(x-8)^2 + 1} + \sqrt{64 + \left(\frac{x}{x-8} - 1\right)^2} = \frac{x}{x-8}\sqrt{(x-8)^2 + 1}$ 1p

Fie $f : (8, \infty) \to \mathbb{R}; f(x) = \frac{x}{x-8}\sqrt{(x-8)^2 + 1}$.

Calculează $f'(x) = \frac{(x-8)^3 - 8}{\sqrt{(x-8)^2 + 1} \cdot (x-8)^2}$ 1p

Deduce că x = 10 este punct de minim şi află coordonatele punctelor A(10, 0), B(0, 5)

.... 1p

Lungimea drumului minim $AB = 5\sqrt{5} \simeq 11{,}18$ km 1p