INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
8 martie 2014

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A IX-A

1. În trei cutii notate A, B, C, sunt 100 de bile. Dacă numărul bilelor din cutia B diferă de numărul bilelor din cutia A cu 4, respectiv numărul bilelor din cutia C diferă de numărul bilelor din cutia A cu 3 şi totodată numărul bilelor din fiecare cutie nu se divide la 3, să se afle câte bile sunt în fiecare cutie.

Soluție.

$a+b+c=100$, $|a-b|=4$, $|a-c|=3$ 2p

$b=a-4$ nu e posibil 2p

$b=a+4$ conduce la posibilitățile $(a;b;c)=(31;35;34)$ şi $(a;b;c)=(33;37;30)$ 2p

$(a;b;c)=(33;37;30)$ este exclusă $\Rightarrow$ soluție unică $(a;b;c)=(31;35;34)$ 1p

2. Fie ABC un triunghi şi punctele $D\in(BC)$ încât $BD=2DC$, $E\in(AB)$ încât $AE=EB$, respectiv $F\in(CE)$ încât $CF=FE$. Se cere:

   a) Arătați că $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ şi $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$;

   b) Arătați că punctele A, F, D sunt coliniare şi determinați valoarea raportului $\frac{AF}{FD}$.

Soluție.

a)

Arată $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ 2p

Arată $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ 2p

b)

Justifică A, F, D coliniare 2p

Determină $\frac{AF}{FD}=3$ 1p

3. Se consideră mulțimea P a tuturor progresiilor aritmetice neconstante $(a_n)_{n\geq 1}$ care au $a_1=4$ şi toți termenii numere naturale.

a) Arătați că toate progresiile din mulțimea P au rația număr natural nenul;

b) Determinați termenul general al acelei progresii din P în care $a_{20} \cdot a_{14}$ are cea mai mică valoare;

c) Aflați câte progresii din mulțimea P au ca termen numărul 2014.

Soluție.

a)

Constată necesar $r \in \mathbb{Z}$ 1p

Constată necesar $r \neq 0$ 1p

Constată necesar $r \in \mathbb{N}^*$ 1p

b)

Rația minim posibilă este $r = 1$ 1p

$a_{20} \cdot a_{14} \geq 23 \cdot 17$ 1p

c)

$a_k = 2014 \Rightarrow (k-1)r = 2010$ 1p

$r / 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67 \Rightarrow$ 16 progresii au ca termen numărul 2014 .... 1p

4. O ecuație de gradul al doilea $ax^2 + bx + c = 0$ o vom numi ”perfectă” dacă a, b, c sunt numere reale nenule şi oricum am schimba ordinea celor trei coeficienți a, b, c, toate ecuațiile astfel obținute au o soluție reală comună.

a) Arătați că ecuația $x^2 - 2014x + 2013 = 0$ este perfectă;

b) Arătați că ecuația $2013x^2 + 2014x + 1 = 0$ nu este perfectă;

c) Determinați ce condiție trebuie să verifice numerele $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ pentru ca ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ să fie perfectă.

Soluție.

a) $x = 1$ soluție comună 3p

b) Justificare 1p

c)

Dacă x_0 verifică toate ecuațiile atunci $x_0 = 1 \Rightarrow a + b + c = 0$ 1p

Dacă $a + b + c = 0$ atunci $x_0 = 1$ verifică toate ecuațiile 1p

$\Rightarrow$ condiția de ecuație ”perfectă” este $a + b + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ 1p

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A X-A

1. Considerăm numărul complex $z=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

   a) Demonstrați că $z^2-z+1=0$ şi $z^3+1=0$;

   b) Arătați că $z^{2014}+z$ este număr real;

   c) Arătați că $(1+z)(1-z^2)(1-z^{2014})(1+z^{2015})$ este număr natural pătrat perfect.

<u>Soluție.</u>

a)

Justifică $z^2-z+1=0$ 2p

Justifică $z^3+1=0$ 1p

b) $z^{2014}+z=0\in\mathbb{R}$ 2p

c) $z^{2014}=-z;\ z^{2015}=-z^2$ 1p

$a=3^2$ 1p

2. Sunt date 2013 greutăți marcate cu masele de 1g, 2g, ..., 2013g. Atunci:

   a) Din greutățile de 1g, 2g, ..., 9g formați trei grămăjoare de mase egale;

   b) Justificați că din oricare 6 greutăți de mase m, m+1, m+2, m+3, m+4, m+5 se pot forma trei grămăjoare de mase egale;

   c) Arătați că se pot forma cu cele 2013 greutăți trei grămezi de mase egale;

   d) Dar dacă aveți 2014 greutăți marcate cu masele de 1g, 2g, ..., 2014g, puteți forma cu ele 3 grămezi cu masele egale? Justificați răspunsul.

<u>Soluție.</u>

a) Formează un exemplu 1p

b) $m+(m+5)=(m+1)+(m+4)=(m+2)+(m+3)$ 1p

c) Împărțim primele 9 greutăți în trei grămăjoare de mase egale 1p

Rămân $2004=6\cdot 334$ greutăți 1p

Cele 2004 de greutăți = 334 de grupe, fiecare grupă cu 3 grămezi de mase egale 1p

Finalizare 1p

d) Nu este posibil, deoarece $S=1+2+3+...+2014$ nu se divide la 3 .... 1p

3. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2013-x, x\in\mathbb{Q}\\ 2014-x, x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$

   a) Calculați $f(2014)+f\left(2013-\sqrt{2014}\right)$;

b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $f(x)=2014$;

c) Arătați că $(f \circ f)(x)=x,\ (\forall)x\in\mathbb{R}$

d) Demonstrați că f este inversabilă şi determinați inversa ei.

Soluție.

a) $f(2014)+f\left(2013-\sqrt{2014}\right)=\sqrt{2014}$ 2p

b) $x=-1$ 2p

c) Arată $(f \circ f)(x)=x,\ (\forall)x\in\mathbb{R}$ 2p

d) Conform cu c) funcția este bijectivă şi $f^{-1}=f$ 1p

4. 4.1 Arătați că $ab\le\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\le\dfrac{a^2+b^2}{2}$, pentru orice numere $a, b\in\mathbb{R}$.

4.2 Un melc se deplasează prin primul cadran al unui sistem de coordonate (xOy), pe un grafic de ecuație $y=2^{\frac{1}{\log_2 x}}$, cu $x\in(1;+\infty)$.

a) Arătați că $y>1$ şi $(\log_2 y)\cdot(\log_2 x)=1$;

b) Arătați că $x\cdot y\ge 4$;

c) Determinați distanța minimă de la melc până la originea O a sistemului de coordonate.

Soluție.

4.1 .... 2p

4.2.

a) $y>1$ 1p

$(\log_2 y)\cdot(\log_2 x)=1$ 1p

b) 2p

c) distanța minimă este $2\sqrt{2}$, obținută cu $x=y=2$ 1p

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEŢEANĂ
8 martie 2014

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecţia mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XI-A

1. Considerăm matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & -6\\ 2 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.
   a) Arătaţi că C este inversabilă, după care calculaţi C^{-1} şi verificaţi egalitatea $A=C^{-1}\cdot B\cdot C$;
   b) Demonstraţi că $B^n=\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$;
   c) Calculaţi A^n, $n\in\mathbb{N}^*$.

Soluţie.
a)
C este inversabilă 1p
$C^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ 1p
$A=C^{-1}\cdot B\cdot C$ 1p
b) Inducţie 1p
c)
$A^2=C^{-1}\cdot B^2\cdot C$ 1p
$A^n=C^{-1}\cdot B^n\cdot C$ 1p
Finalizare 1p

2. Fie $a, b\in\mathbb{R}$, $a\geq -2$. Determinaţi a şi b încât $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+a}-b}{x^2+2x-3}=\dfrac{3}{16}$.

Soluţie.
$b\neq\sqrt{a+2}\Rightarrow$ limită infinită 2p
$b=\sqrt{a+2}\Rightarrow L=\dfrac{3}{8\sqrt{a+2}}$ 3p
$L=\dfrac{3}{16}\Rightarrow a=2$ 1p
$\Rightarrow b=2$ 1p

3. Fie $a>0$, $b\in(0;1)$ şi funcţia $f:[0;1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^3, & \text{pentru } x\in[0;b]\\ a\cdot x^4, & \text{pentru } x\in(b;1]\end{cases}$

a) Arătați că f are limită în $x=b$ dacă şi numai dacă $a\cdot b=1$;

b) Calculați $L_1=\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}$ şi $L_2=\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x>b}}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}$.

<u>Soluție.</u>

a)

$l_s=b^3,\ l_d=a\cdot b^4$ 1p

$l_s=l_d \Leftrightarrow a\cdot b=1$ 2p

b)

$L_1=3b^2$ 1p

$L_2=-\infty$ pentru $a\cdot b<1$ 1p

$L_2=+\infty$ pentru $a\cdot b>1$ 1p

$L_2=4b^2$ pentru $a\cdot b=1$ 1p

4. Fie $M_2(\mathbb{R})$ mulțimea matricelor pătratice de ordin doi şi cu elemente numere reale. Arătați că:

a) $\det(X+Y)+\det(X-Y)=2(\det X+\det Y)$, oricare ar fi $X, Y\in M_2(\mathbb{R})$;

b) Dacă $A, B\in M_2(\mathbb{R})$ atunci sau $\det(A+B)\geq \det A+\det B$ sau $\det(A-B)\geq \det A+\det B$;

c) Andrei vrea să arate că la orice alegere de trei matrici $A,B,C\in M_2(\mathbb{R})$ poate alege semne + sau – astfel încât $\det(A\pm B\pm C)\geq \det A+\det B+\det C$. Aflați dacă acest lucru este posibil. Dacă da, considerând $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3&-2\\1&4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2&-3\\4&-5\end{pmatrix}$, aflați cum trebuie să aleagă Andrei semnele + şi –.

<u>Soluție.</u>

a) Verificare 2p

b) Justificare 2p

c) Justificare răspuns afirmativ 2p

Alegerea semnelor +, – în cazul concret dat 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
8 martie 2014

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XII-A

1. Considerând inelul $(\mathbb{Z}_{2014};+;\cdot)$, se cere:

a) Arătați că $\widehat{53}$ nu este inversabil;

b) Arătați că $\widehat{2011}$ este inversabil şi are inversul $\widehat{671}$;

c) Rezolvați în $\mathbb{Z}_{2014}$ ecuația $\hat{3}\cdot x+\widehat{2010}=\hat{1}$

<u>Soluție.</u>

a) $53/2014$, deci $\widehat{53}$ este neinversabil 2p

b)

$(2011;\ 2014)=1 \Rightarrow \widehat{2011}$ este inversabil 1p

Justifică $\widehat{2011}\cdot\widehat{671}=\hat{1}$, deci $\widehat{2011}^{-1}=\widehat{671}$ 2p

c)

$\hat{3}\cdot x+\widehat{2010}=\hat{1} \Leftrightarrow \widehat{2011}\cdot x=\widehat{2009}$ 1p

$x=\widehat{671}\cdot\widehat{2009}=-\widehat{671}\cdot\hat{5}=-\widehat{1341}=\widehat{673}$ 1p

2. Fie funcția $f:[-1;3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2e^x}, & x\in[-1;\ 0]\\ \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}, & x\in(0;\ 3]\end{cases}$

a) Arătați că f admite primitive;

b) Arătați că $F:[-1;3]\to\mathbb{R}$, $F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2e^x}, & x\in[-1;\ 0]\\ 2\sqrt{x+1}-2\ln\left(1+\sqrt{1+x}\right)+2\ln 2-2, & x\in(0;\ 3]\end{cases}$

este primitiva funcției f care se anulează în $x=0$;

c) Calculați $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$

<u>Soluție.</u>

a)

Justifică f continuă pe $[-1;\ 3]$ 1p

f continuă $\Rightarrow$ primitivabilă 1p

b)

Justifică F derivabilă pe $[-1;\ 3]\setminus\{0\}$ 1p

Justifică F derivabilă în $x=0$ 1p

Constată $F'=f$ şi $F(0)=0$, concluzie 1p

c)

$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = F_1(x)\Big|_{-1}^{0} + F_2(x)\Big|_{0}^{3}$ 1p

Finalizare 1p

3. Pe $\mathbb{Z}$ se consideră legea de compoziţie $x\circ y = xy-5x-5y+30$.

a) Arătaţi că legea $\circ$ este comutativă, asociativă şi cu element neutru;

b) Determinaţi mulţimea elementelor inversabile din $(\mathbb{Z};\ \circ)$;

c) Pe tablă sunt scrise numerele $0,\ 1,\ 2,\ ...,\ 24$. Cei 24 de elevi ai clasei trec pe rând la tablă şi aleg câte 2 numere de pe tablă, le şterg şi scriu pe tablă rezultatul compunerii, după legea $\circ$, a celor două numerele alese. Aflaţi ce număr va scrie pe tablă ultimul elev.

Soluţie.

a) Justificare 3p

b)

$x' = 5+\dfrac{1}{x-5}\in\mathbb{Z},\ x\neq 5$ 1p

$\Rightarrow$ mulţimea elementelor inversabile este $\{4;\ 6\}$ 1p

c) ultimul număr este $1\circ 2\circ 3\circ ...\circ 24$ 1p

cum 5 este absorbant, ultimul număr este 5 .... 1p

4. Fie $I_n=\int_0^1 x^n e^x\,dx,\ n\in\mathbb{N}^*$. Se cere:

a) Calculaţi I_1;

b) Arătaţi că $(n+1)I_n + I_{n+1} = e,\ (\forall)n\in\mathbb{N}^*$;

c) Arătaţi că I_n este număr raţional numai în cazul $n=1$.

Soluţie.

a) 2p

b) 2p

c)

$n=1\Rightarrow I_1=1\in\mathbb{Q}$ 1p

$n\geq 2\Rightarrow I_n\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 2p