Olimpiada Naţională Gazeta Matematică

Etapa I, Judeţul BIHOR

Subiect

Clasa a XII - a

Timp de lucru: 120 de minute.

Fiecare problemă se punctează cu 1 punct.

Alegeţi varianta corectă de răspuns. O singură variantă este corectă.

Problemele 1 şi 2 au următorul enunţ comun: Se consideră grupul $(G,*)$, unde $G=(-1,1)$ şi $x*y=\dfrac{x+y}{1+xy}$, $\forall\, x,y\in(-1,1)$.

1. Pentru care dintre perechile $(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, funcţia $f:(-1,1)\to(0,+\infty)$, $f(x)=\dfrac{ax+b}{1+x}$ este un izomorfism de la grupul $(G,*)$ la grupul $\left(\mathbb{R}_+^*,\cdot\right)$?

   $\boxed{\text{A}}$ $(-1,1)$ $\boxed{\text{B}}$ $(-1,-1)$ $\boxed{\text{C}}$ $(0,1)$ $\boxed{\text{D}}$ $(1,0)$

2. Dacă $A=\dfrac{1}{3}*\dfrac{1}{5}*\ldots*\dfrac{1}{2021}$ şi $B=\dfrac{1}{2}*\dfrac{1}{4}*\ldots*\dfrac{1}{2020}$, atunci:

   $\boxed{\text{A}}$ $A>B$ $\boxed{\text{B}}$ $A<B$ $\boxed{\text{C}}$ $A-B=0$ $\boxed{\text{D}}$ $A+B=1$

3. Fie $a,b\in\mathbb{R}$ şi $G=(b,\infty)$. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale se consideră legea de compoziţie $x*y=2xy-4ax-4ay+8a^2+2a$, $\forall\, x,y\in\mathbb{R}$. Perechea $(G,*)$ este un grup, dacă şi numai dacă

   $\boxed{\text{A}}$ $b=a$ $\boxed{\text{B}}$ $a=2$ şi $b=1$ $\boxed{\text{C}}$ $a+b=2$ $\boxed{\text{D}}$ $b=2a$

Problemele 4 şi 5 au următorul enunţ comun: Presupunem cunoscut faptul că mulţimea

$$G=\left\{A(x)=\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & x\\ 0 & x & x & 0\\ 0 & x & x & 0\\ x & 0 & 0 & x\end{pmatrix} : x\in\mathbb{R}^*\right\}$$

are o structură de grup în raport cu înmulţirea matricelor.

4. Elementul neutru al grupului $(G,\cdot)$ este:

   $\boxed{\text{A}}$ I_2 $\boxed{\text{B}}$ $A(1)$ $\boxed{\text{C}}$ $A\left(\dfrac{1}{2}\right)$ $\boxed{\text{D}}$ $A(0)$

5. Simetricul lui $A(x) \in G$ este:

A $A\left(\dfrac{1}{x}\right)$ B $A\left(\dfrac{1}{4x}\right)$ C $A(-x)$ D $A\left(\dfrac{1}{2x}\right)$

6. Dacă $n\mathbb{Z} = \{nk \,|k \in \mathbb{Z}\}$, atunci

A $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ B $4\mathbb{Z} \cap 6\mathbb{Z} = 12\mathbb{Z}$ C $2\mathbb{Z} \subset 6\mathbb{Z}$ D $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$

7. Pe mulţimea $\mathbb{Q}_+^*$ se consideră operaţia " $*$ ", operaţie care verifică următoarele proprietăţi:

- $x * 1 = x,\ \forall\ x \in \mathbb{Q}_+^*$
- $x * x = 1,\ \forall\ x \in \mathbb{Q}_+^*$
- $(a * b) \cdot (x * y) = (a \cdot x) * (b \cdot y),\ \forall\ a, b, x, y \in \mathbb{Q}_+^*$

Dacă $2021 * 43 = a$, atunci

A $a = 47$ B $a = 2021$ C $a = 1$ D $a = 43$

8. Se consideră mulţimea $M = \{z \in \mathbb{C}^* \,|az^n = b\}$, unde $a, b \in \mathbb{C}^*$ şi $n \in \mathbb{N}^*$. M este un subgrup al grupului $(\mathbb{C}^*, \cdot)$, dacă şi numai dacă:

A $|a| = |b|$ B $a = b$ C $b = 1$ D $a = 1$

9. Numărul elementelor inversabile ale monoidului $\left(\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right], \cdot\right)$ este:

A 1 B 2 C 3 D ∞

10. Considerăm matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ şi grupul $(GL_2(\mathbb{R}), \cdot)$, unde

$$GL_2(\mathbb{R}) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \,|\det A \neq 0\},$$

iar " $\cdot$ " este operaţia de înmulţire a matricelor. Dacă $\varphi : (\mathbb{Z}, +) \to (GL_2(\mathbb{R}), \cdot)$ este un morfism de grupuri astfel încât $\varphi(1) = A$, atunci $\varphi(2021)$ este egal cu:

A $\varphi(2021) = \left(\sqrt{2}\right)^{2021} \cdot A$ B $\varphi(2021) = 2^{1010} \cdot I_2$

C $\varphi(2021) = -2^{1010} \cdot A$ D $\varphi(2021) = \left(\sqrt{2}\right)^{2021} \cdot I_2$

Problemele 11 şi 12 au următorul enunţ comun: Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}$, definit prin $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^n\, x\, dx,\ n \geq 1.$

11. I_2 are valoarea:

A $\dfrac{\pi}{4}$ B 2 C 1 D $1 - \dfrac{\pi}{4}$

12. Şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ verifică relaţia:

$\boxed{\text{A}}$ $I_{n+2}+I_n=\dfrac{1}{n+1}$ $\boxed{\text{B}}$ $I_{n+1}=2I_n$

$\boxed{\text{C}}$ $I_{n+1}-I_n=\dfrac{1}{n+1}$ $\boxed{\text{D}}$ $I_{n+2}-I_n=\dfrac{1}{n+1}$

13. Se consideră funcţia $f:\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{3\cos x-\sin x}{2\cos x+\sin x}$. Care dintre următoarele funcţii este o primitivă a lui f?

$\boxed{\text{A}}$ $F(x)=2x-3\ln(2\cos x+\sin x)$ $\boxed{\text{B}}$ $F(x)=x+2\ln(2\cos x+\sin x)$

$\boxed{\text{C}}$ $F(x)=x-\ln(2\cos x+\sin x)$ $\boxed{\text{D}}$ $F(x)=x+\ln(2\cos x+\sin x)$

14. Dacă funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ verifică relaţia $f^{2021}(x)+2021^{f(x)}=x,\ \forall\, x\in\mathbb{R}$, atunci:

$\boxed{\text{A}}$ $f(x)=\log_{2021}x$ $\boxed{\text{B}}$ f admite primitive pe $\mathbb{R}$

$\boxed{\text{C}}$ f nu are proprietatea lui Darboux $\boxed{\text{D}}$ f nu este derivabilă pe $\mathbb{R}$

15. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x^{2021}, & x\in\mathbb{Q}\\ 2021^x, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$. Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată ?

$\boxed{\text{A}}$ f este continuă pe $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{B}}$ f nu admite primitive pe $\mathbb{R}$

$\boxed{\text{C}}$ f admite primitive pe $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{D}}$ f este derivabilă pe $\mathbb{R}$

16. Să se determine toate funcţiile polinomiale neconstante cu coeficienţi reali, $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ştiind că

$$2\int_1^x P(t)\,dt=P(x)\cdot P(2-x),\quad \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

$\boxed{\text{A}}$ $P(x)=x-1$ $\boxed{\text{B}}$ $P(x)=x^2-1$

$\boxed{\text{C}}$ $P(x)=(x-2)^2$ $\boxed{\text{D}}$ $P(x)=1-x$

17. Dacă $f:[0,2]\to(0,\infty)$ este o funcţie continuă, atunci $\displaystyle\int_0^2\frac{f(x)}{f(x)+f(2-x)}dx$ are valoarea:

$\boxed{\text{A}}$ $f(0)$ $\boxed{\text{B}}$ 1 $\boxed{\text{C}}$ $\ln 2$ $\boxed{\text{D}}$ $f(2)-f(0)$

18. Să se determine funcţiile polinomiale $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, care satisfac relaţia

$$\int_x^{x+1} P(t)\,dt = 6x^2,\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

$\boxed{\text{A}}$ $P(x) = 6x^2 - 6x + 1$

$\boxed{\text{B}}$ $P(x) = x^3 + 6x^2 + 1$

$\boxed{\text{C}}$ $P(x) = x^2 + x + 1$

$\boxed{\text{D}}$ $P(x) = 6x + 1$

19. Valoarea integralei $\displaystyle\int_3^{15} \left(\sqrt{x + 5 - 4\sqrt{x+1}} + \sqrt{x + 17 - 8\sqrt{x+1}}\right) dx$, este:

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\boxed{\text{B}}$ 24 $\boxed{\text{C}}$ 45 $\boxed{\text{D}}$ 12

20. Se consideră funcţiile $f, g, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde $G(x) = e^x \cdot f(x)$ şi $g(x) = 2e^x \cdot f(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}$. Să se determine toate funcţiile derivabile f, ştiind că G este o primitivă a lui g.

$\boxed{\text{A}}$ $f(x) = c \cdot \sin x,\ c \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{B}}$ $f(x) = e^x + c,\ c \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{C}}$ $f(x) = c \cdot e^x,\ c \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{D}}$ $f(x) = c \cdot e^x \sin x,\ c \in \mathbb{R}$