



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Profiluluman

Faza locală, 5 martie 2016

Clasa a XII-a

Subiectul 1 (7 p)

Se considerămatricele $G(x) = \begin{pmatrix} 3^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$, unde $x \in \mathbb{R}$

- a) Să se aratecă $G^n(x) = G(nx)$, $x \in \mathbb{R}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$;
- b) Să se calculezedeterminantulmatricei: $G(0) + G(1) + G(2) + \dots + G(2016)$

Subiectul 2 (7 p)

Se consideră mulțimea:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\} \subset M_2(\mathbb{Q}).$$

- a) Să se aratecăpentruoricarematrice $A, B \in G$ are loc egalitatea $A \cdot B = B \cdot A$;
- b) Să se determine matricea $E \in G$ pentru care $E \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

Subiectul 3 (7 p)

Se consideră determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Să se arate că $\Delta = \frac{1}{2}(a+b+c)((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2)$.

Subiectul 4 (7 p)

Se consideră sistemul
$$\begin{cases} x + ay + 2z = 1 \\ x + (2a-1)y + 3z = 1, a \in \mathbb{R} \\ x + ay + (a-3)z = 1 \end{cases}$$

cumatricea sistemului $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & 2a-1 & 3 \\ 1 & a & a-3 \end{pmatrix}$.

- a) Să se rezolveecuațiadet(A) = 0;
- b) Să se rezolvesistemulpentrua = 0.



Barem de corectare

$$1. a) \quad G(x) \cdot G(x) = \begin{pmatrix} 3^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{2x} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2x & 1 \end{pmatrix} (2p)$$

Presupunem $P(k): G(x)^k = G(xk), \forall k \in N$, adevărată.

Demonstrăm $P(k+1): G(x)^{k+1} = G[x(k+1)]$, adevărată:

$$G(x)^k \cdot G(x) = \begin{pmatrix} 3^{kx} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & xk & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{x(k+1)} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x(k+1) & 1 \end{pmatrix} (2p)$$

rezultă $P(n): G(x)^n = G(nk), \forall n \in N$, adevărată.

$$b) G(0) + G(1) + \dots + G(2016) = \begin{pmatrix} 3^0 + 3^1 + \dots + 3^{2016} & 0 & 0 \\ 0 & 1 + 1 + \dots + 1 & 0 \\ 0 & 1 + 2 + \dots + 2016 & 1 + 1 + \dots + 1 \end{pmatrix} (2p)$$

$$\det A = \begin{vmatrix} \frac{3^{2017}-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2017 & 0 \\ 0 & 1008 \cdot 2017 & 2017 \end{vmatrix} = \frac{3^{2017}-1}{2} \cdot 2017^2 (2p)$$

$$2. a) A \cdot B = \begin{pmatrix} ac + 3bd & ad + bc \\ 3(ad + bc) & ac + 3bd \end{pmatrix}, (2p); B \cdot A = \begin{pmatrix} ac + 3bd & ad + bc \\ 3(ad + bc) & ac + 3bd \end{pmatrix}, (2p)$$

$$b) \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a + 6b & 2a + b \\ 3b + 6a & a + 6b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1p); \quad \text{apoi avem: } \begin{cases} a + 6b = 1 \\ 2a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{11}, b = \frac{2}{11} (2p);$$

$$3. \Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & b+a+c & c+b+a \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) (3p)$$

$$= \frac{1}{2}(a+b+c)(a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bc + c^2)$$

$$= \frac{1}{2}(a+b+c)((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2). (4p)$$

$$4. a) \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & 2a-1 & 3 \\ 1 & a & a-3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a^2 - 6a + 5 = 0; a_1 = 1 \text{ și } a_2 = 5 (3p)$$

$$b) \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 (2p) \Rightarrow x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 1, y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 0, z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = 0 (4p).$$