



---

## CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

### Profilul uman

Faza locală, 5 martie 2016

### Clasa a X-a

#### Subiectul 1 (7 p)

Se consideră expresia  $E(x, y) = (x^2 \sqrt{y})^p \cdot \sqrt{y \sqrt{x}}$  unde  $x, y > 0$ . Să se scrie  $E(x, y)$  ca un produs de puteri ale lui  $x$  și  $y$  și apoi să se determine  $p$  astfel încât  $E(16, 4) = 4$ .

#### Subiectul 2 (7 p)

Să se calculeze  $\left(\frac{1}{9}\right)^3 \cdot \left((27\sqrt{3})^{\sqrt{12}}\right) \cdot (0, (3))^{-2} \cdot \frac{1}{9^5}$ .

#### Subiectul 3 (7 p)

Să se demonstreze următoarele egalități: (a)  $3^{\lg \frac{7}{5}} \cdot 7^{\lg \frac{5}{3}} \cdot 5^{\lg \frac{3}{7}} = 1$

(b)  $\log_a b \cdot \log_c d \cdot \log_e f = \log_a f \cdot \log_c b \cdot \log_e d$ ,  $\forall a, b, c, d, e, f \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ .

#### Subiectul 4 (7 p)

Calculați: (a)  $S = \log_3 x + \log_3 x^2 + \dots + \log_3 x^{100}$ ,  $x > 0$ ;

(b)  $S' = \lg \sqrt{x} + \lg \sqrt[2]{x} + \lg \sqrt[3]{x} + \dots + \lg \sqrt[2015]{x}$ ,  $x > 0$ .

#### Barem de corectare

1.  $E(x, y) = x^{2p} y^{\frac{p}{2}} y^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{8p+1}{4}} y^{\frac{p+1}{2}}$  (3p)

Avem  $E(16, 4) = 2^{8p+1} 2^{p+1} = 2^{9p+2} \Rightarrow p = 0$  (4p)

2.  $A = 9^{-3} \cdot 27^6 \cdot 3^2 \cdot 3^{-10} = 3^{-6} \cdot 3^{18} \cdot 3^2 \cdot 3^{-10}$  (4p)

avem că  $A = 3^{20-16} = 3^4 = 81$  (3p)



3. (a) Logaritmăm expresia în baza 10 (1p)  
 $(\lg 7 - \lg 5) \cdot \lg 3 + (\lg 5 - \lg 3) \cdot \lg 7 + (\lg 3 - \lg 7) \cdot \lg 5 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$  (2p)

(b) avem:  $\frac{\log_a b}{\log_a f} \cdot \frac{\log_c d}{\log_c b} \cdot \frac{\log_e f}{\log_e d} = 1$  (2p)  
 $\Leftrightarrow \log_f b \cdot \log_b d \cdot \log_d f = 1 \Leftrightarrow \log_f b \cdot \log_b f = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$  (2p)

4. (a)  $S = \log_3 x^1 \cdot x^2 \cdot \dots \cdot x^{100}$  (3p)

$$S = \log_3 x^{\left(\frac{100 \cdot 101}{2}\right)} \Rightarrow S = 5050 \log_3 x$$

(b)  $S' = \lg(\sqrt{x} \cdot \sqrt[2]{x} \cdot \dots \cdot \sqrt[2015]{x} \cdot \sqrt[2016]{x})$  (1p)

$$\Rightarrow S' = \lg x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{2015 \cdot 2016}} \quad (1p)$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{2015 \cdot 2016} = 1 - \frac{1}{2016} = \frac{2015}{2016}$$

$$\Rightarrow S' = \frac{2015}{2016} \cdot \lg x \quad (2p)$$