OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 16. 02. 2019

Clasa a V – a

PROBLEMA 1. Într-o clasă cu 35 de elevi, numărul băieţilor este cu 2 mai mare decât jumătate din numărul fetelor. Să se arate că cel puţin patru fete sunt născute în aceeaşi zi a săptămânii şi cel puţin doi băieţi sunt născuţi în aceeaşi lună a anului.

PROBLEMA 2.

a) Se consideră numărul natural $\overline{abc}$, cu suma cifrelor egală cu 25. Calculaţi suma cifrelor numărului $\overline{abc}+1$.

b) Pentru un număr natural m, notăm cu $S(m)$ suma cifrelor sale. Arătaţi că există un număr natural n, astfel încât $S(n)-S(n+1)=2069$.

PROBLEMA 3.

a) Să se scrie numărul 2019^{2019} ca o sumă de 2019 numere naturale consecutive.

b) Să se scrie numărul 2019^{2019} ca o sumă de patru pătrate perfecte nenule.

PROBLEMA 4. Scriem în ordine crescătoare numerele naturale de patru cifre diferite, care au suma cifrelor 12. Aflaţi ce poziţie are numărul 2019 în această scriere.

[1] Timpul efectiv de lucru este de 2 ore;
[2] Toate problemele sunt obligatorii;
[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 16. 02. 2019

Clasa a VI – a

PROBLEMA 1. Fie numerele naturale nenule a, p şi q. Dacă $ap+1$ este divizibil cu q şi $aq+1$ este divizibil cu p, demonstraţi că numerele p şi q sunt prime între ele şi $a \geq \dfrac{pq-1}{p+q}$.

PROBLEMA 2. La un concurs de matematică, elevii au de rezolvat patru probleme. Pentru fiecare problemă se acordă câte un punct din oficiu. Pe lângă punctele din oficiu, elevul mai primeşte puncte astfel: dacă rezolvă corect prima problemă, primeşte încă 3 puncte; dacă rezolvă corect a doua problemă, primeşte încă 6 puncte; dacă rezolvă corect a treia problemă, primeşte încă 12 puncte; dacă rezolvă corect a patra problemă, primeşte încă 24 de puncte. Nu se acordă punctaje intermediare pentru rezolvări incomplete. Arătaţi că dacă doi elevi au acelaşi punctaj, atunci cei doi elevi au rezolvat corect aceleaşi probleme.

PROBLEMA 3. Pe un cerc sunt instalate 2019 becuri, dintre care 1010 sunt aprinse, iar restul sunt stinse. Prin faptul că un bec îşi schimbă starea, se înţelege că cel aprins se stinge şi că cel stins se aprinde. Prin mutare, se înţelege că dacă cineva atinge un bec, atunci cele două becuri vecine becului atins, îşi schimbă starea. Gigel îşi propune să facă mai multe mutări astfel încât să fie toate becurile aprinse simultan. Aflaţi dacă poate să facă acest lucru. Justificaţi!

PROBLEMA 4. Fie unghiul ascuţit $\sphericalangle DOE$, $OM \perp OD$ şi $ON \perp OE$, astfel încât $\mathrm{m}\left(\sphericalangle MON\right) = 140^\circ$. Determinaţi măsura unghiului $\sphericalangle XOY$, dacă OX este bisectoarea unghiului $\sphericalangle MOD$ şi OY este bisectoarea unghiului $\sphericalangle NOE$.

[1] Timpul efectiv de lucru este de 2 ore;
[2] Toate problemele sunt obligatorii;
[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 16. 02. 2019

Clasa a VII – a

PROBLEMA 1. Să se arate că $\{\sqrt{1}\}+\{\sqrt{3}\}+\{\sqrt{5}\}+...+\{\sqrt{49}\}<18$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului x.

PROBLEMA 2. Găsiţi numerele naturale m şi n pentru care

$$\frac{4n}{2m+3}=\frac{n-2}{m}.$$

PROBLEMA 3. Fie M şi N mijloacele laturilor $[AD]$, respectiv $[DC]$ ale rombului $ABCD$, $BM\cap AC=\{P\}$, iar $BN\cap AC=\{T\}$.

a) Arătaţi că $MNTP$ este un trapez isoscel;

b) Dacă $AN\cap BD=\{G\}$ şi $GP\perp AB$, demonstraţi că $ABCD$ este un pătrat.

PROBLEMA 4. Pe laturile triunghiului ABC considerăm punctele $M\in(BC)$, $N\in(AC)$ şi $P\in(AB)$, astfel încât $AM\cap BN\cap CP=\{O\}$. Să se arate că $\frac{MO}{MA}+\frac{NO}{NB}+\frac{PO}{PC}=1$.

[1]Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;

[2]Toate problemele sunt obligatorii;

[3]Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 16. 02. 2019

Clasa a VIII – a

PROBLEMA 1. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub, M mijlocul muchiei $D'C'$ şi $DT \perp MC, T \in MC$.

a) Să se arate că $DT \perp (MBC)$;

b) Dacă distanţa dintre dreptele AD şi BM este $a\sqrt{5}$, determinaţi lungimea muchiei cubului.

PROBLEMA 2.

a) Demonstraţi că $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} \leq x + y + z, \forall\ x, y, z > 0$.

b) Să se afle maximul expresiei $\sqrt{ab + ac} + \sqrt{ab + bc} + \sqrt{ac + bc}$, unde $a, b, c > 0$ şi $a + b + c = 2019$.

PROBLEMA 3. Cei 28 de colegi ai lui Gigel au venit în vizită la el. Gigel are un baton de ciocolată sub formă de paralelipiped dreptunghic, $ABCDA'B'C'D'$, cu $AB = 5$ cm, $BC = 3$ cm şi $AA' = 4$ cm, pe care doreşte să-l împartă cu colegii şi fratele lui, astfel încât fiecare să primească un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 1 cm, 1 cm şi 2 cm. Fratele lui fiind mai mic, se grăbeşte şi îşi mănâncă porţia, încălcând însă regula stabilită de Gigel. Ştiind că fratele lui mănâncă două cubuleţe, fiecare cu muchia de 1 cm, unul cu un vârf în A şi celălalt cu un vârf în B, aflaţi dacă Gigel mai poate împărţi ciocolata după regula stabilită de el iniţial.

PROBLEMA 4.

a) Să se demonstreze că restul împărţirii unui pătrat perfect la 3, nu poate fi 2.

b) Fie $a = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2 + 11} \in \mathbb{Q}$, unde p, q şi r sunt numere prime, cu $p < q < r$. Să se arate că $p = 2$, iar apoi să se determine numerele q şi r.

[1] Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2] Toate problemele sunt obligatorii;
[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 16. 02. 2019

Clasa a IX – a

PROBLEMA 1. Fie $x, y, z > 0$ numere reale cu proprietatea $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3$. Să se demonstreze inegalităţile următoare:

a) $x+y+z \geq 3$;

b) $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2 \geq 12$.

PROBLEMA 2. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu raţia pozitivă r şi primul termen $a_1 \geq \frac{1}{2}$. Determinaţi partea întreagă a numărului

$$A=\sqrt{1+\frac{r}{a_1a_2}}+\sqrt{1+\frac{r}{a_2a_3}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{r}{a_na_{n+1}}}\ ,\ n\geq 2.$$

PROBLEMA 3. Pe laturile triunghiului ABC se consideră punctele $A_1 \in (BC)$, $B_1 \in (CA)$ şi $C_1 \in (AB)$, astfel încât AA_1, BB_1 şi CC_1 sunt concurente. Cercul circumscris triunghiului $A_1B_1C_1$ intersectează (a doua oară) BC, CA şi AB, respectiv, în punctele A_2, B_2 şi C_2. Arătaţi că:

a) $AC_1 \cdot AC_2 = AB_1 \cdot AB_2$;

b) dreptele AA_2, BB_2, CC_2 sunt concurente.

PROBLEMA 4. În patrulaterul convex $ABCD$ se notează cu G centrul de greutate al triunghiului BCD şi cu H ortocentrul triunghiului ACD. Să se demonstreze că punctele A, B, G, H reprezintă, în această ordine, vârfurile unui paralelogram, dacă şi numai dacă G este centrul cercului circumscris triunghiului ACD.

[1]Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2]Toate problemele sunt obligatorii;
[3]Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 16. 02. 2019

Clasa a X – a

PROBLEMA 1.

a) Să se arate că $\frac{3}{2} < \log_2 3 < \frac{5}{3}$.

b) Să se determine numărul natural n pentru care $n < \log_2 3 + \log_3 4 + \log_4 6 + \log_6 8 < n + 1$.

PROBLEMA 2. Determinaţi numerele reale $a \leq 1$ şi $b > 0$, pentru care ecuaţia

$$\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x} = \frac{x^2+b+1}{\sqrt{x^2+b}}$$

are soluţii reale.

PROBLEMA 3. Considerăm familia de funcţii $f_\alpha : \mathbb{N} \to \Gamma$, $f_\alpha(n) = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

a) Demonstraţi că f_α nu este surjectivă, pentru nicio valoare reală a lui α;

b) Demonstraţi că oricare ar fi $m \in \mathbb{N}^*$, există $\alpha \in \mathbb{R}$, astfel încât imaginea funcţiei f_α să aibă m elemente;

c) Demonstraţi că oricare ar fi $\alpha \in \mathbb{R}$, funcţia f_α este sau injectivă sau periodică.

PROBLEMA 4. Considerăm triunghiul ABC cu vârfurile de afixe a, b, c, cu $|a| = |b| = |c| = R$. Înălţimea dusă din vârful A intersectează cercul circumscris triunghiului în punctul D, de afix d.

a) Exprimaţi d în funcţie de a, b, c;

b) Fie muţimea $\mathcal{R}_n = \left\{ z_k = R\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) \middle| 0 \leq k \leq n-1 \right\}$, unde $n \geq 5$ este impar şi fie $k, j, l \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ fixate, două câte două distincte, astfel încât $a = z_k$, $b = z_j$, $c = z_l$. Este posibil ca d să fie element al mulţimii $\mathcal{R}_n$? Justificaţi răspunsul.

---

[1] Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;

[2] Toate problemele sunt obligatorii;

[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 16. 02. 2019

Clasa a XI – a

PROBLEMA 1. Se consideră matricele $A \in M_3(\mathbb{R})$ şi $C = A - A^t$.

a) Să se demonstreze că $\det(C) = 0$;

b) Să se arate că dacă $\operatorname{tr}(A^2) = \operatorname{tr}(A \cdot A^t)$, atunci $C = O_3$.

PROBLEMA 2. Fie matricele $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ şi $\varepsilon = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{C}$. Să se demonstreze că dacă $\det(A + \varepsilon B) \in \mathbb{R}$, atunci $\det(A - B) = \det(A) - \det(B)$.

PROBLEMA 3. Fie şirurile $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ definite prin $a_1 = 1$ şi $a_{n+1} = \dfrac{1 + a_n}{\sqrt{n+1}}$, $n \geq 1$, respectiv $b_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

a) Să se demonstreze că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;

b) Să se demonstreze că $b_n > \sqrt{n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$;

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_n}$.

PROBLEMA 4. Să se determine valorile lui $a \in \mathbb{N}$, pentru care şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, definit prin $x_n = cos\left(\pi\sqrt{n^2 + an + 1}\right)$, este convergent.

[1] Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;

[2] Toate problemele sunt obligatorii;

[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 16. 02. 2019

Clasa a XII – a

PROBLEMA 1. Se consideră funcţia $f : \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \ln(\sin x)$ şi F o primitivă a sa. Să se arate că există şi este finită limita $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x)$.

PROBLEMA 2. Se consideră mulţimea $G = (-1, 1)$ şi operaţia $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$. Să se arate că $(G, *)$ este un grup comutativ şi să se calculeze limita şirului $(x_n)_{n\geq 1}$, unde $x_n = \underbrace{x * x * \ldots * x}_{\text{de } n \text{ ori}}$, $x \in G$.

PROBLEMA 3. Fie H_1 şi H_2 două părţi stabile finite a lui $\mathbb{C}^*$ în raport cu operaţia de înmulţire, având m, respectiv n elemente. Să se arate că dacă $(m, n) = 1$, atunci $H_1 \cap H_2 = \{1\}$.

PROBLEMA 4. Să se arate că dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie neconstantă şi periodică, fară perioadă principală, atunci aceasta nu admite primitive şi nu este integrabilă pe niciun interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

[1] Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2] Toate problemele sunt obligatorii;
[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.