OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 16. 02. 2019

BAREM DE CORECTARE - Clasa a V – a

PROBLEMA 1. Într-o clasă cu 35 de elevi, numărul băieţilor este cu 2 mai mare decât jumătate din numărul fetelor. Să se arate că cel puţin patru fete sunt născute în aceeaşi zi a săptămânii şi cel puţin doi băieţi sunt născuţi în aceeaşi lună a anului.

Barem de corectare.

Metoda figurativă; $35 - 2 = 33$; $33 : 3 = 11$ (**2p**);
Numărul băieţilor este 13 (**1p**);
Numărul fetelor este 22 (**1p**);
Un an are 12 luni, iar numărul băieţilor este 13, deci cel puţin doi băieţi sunt născuţi în aceeaşi lună a anului. O săptămână are 7 zile, iar numărul fetelor este 22, deci cel puţin patru fete sunt născute în aceeaşi zi a saptamânii (**3p**).

PROBLEMA 2.

a) Se consideră numărul natural $\overline{abc}$, cu suma cifrelor egală cu 25. Calculaţi suma cifrelor numărului $\overline{abc} + 1$.

b) Pentru un număr natural m, notăm cu $S(m)$ suma cifrelor sale. Arătaţi că există un număr natural n, astfel încât $S(n) - S(n+1) = 2069$.

Barem de corectare.

a) $a + b + c = 25$; Avem posibilităţile: $9 + 9 + 7 = 25$; $9 + 8 + 8 = 25$ (**1p**);
În primul caz: $\overline{abc} = 997$ şi suma cifrelor numărului $\overline{abc} + 1$ este 26; $\overline{abc} = 979$ şi suma cifrelor numărului $\overline{abc} + 1$ este 17; $\overline{abc} = 799$ şi suma cifrelor numărului $\overline{abc} + 1$ este 8 (**1p**).

În cel de-al doilea caz: $\overline{abc} = 988$ sau $\overline{abc} = 898$ şi suma cifrelor numărului $\overline{abc} + 1$ este 26; $\overline{abc} = 889$ şi suma cifrelor numărului $\overline{abc} + 1$ este 17 (**1p**).

b) Dacă la efectuarea sumei $n + 1$ nu există transfer $(u(n) \neq 9)$, atunci $S(n+1) - S(n) = 1$ (**1p**).

Dacă $u(n) = 9$, notăm cu k numărul de cifre de 9 cu care se termină numărul n. Rezultă $n = \overline{(a)\,99\ldots9} = (a+1) \cdot 10^k - 1$ cu a număr natural nenul şi $u(a) \neq 9$ (**1p**).

Avem $S(n) = S(a) + 9k$ şi $n + 1 = \overline{(a+1)\,00\ldots0}$, deci $S(n+1) = S(a+1) = S(a) + 1$; $S(n) - S(n+1) = 9k - 1$; (**1p**)

$2069 = 9 \cdot 230 - 1$; $k = 230$. Cel mai mic astfel de număr este $10^{230} - 1$ (**1p**).

PROBLEMA 3.

a) Să se scrie numărul 2019^{2019} ca o sumă de 2019 numere naturale consecutive.

b) Să se scrie numărul 2019^{2019} ca o sumă de patru pătrate perfecte nenule.

Barem de corectare.

a) Metoda figurativă;

$2019^{2019} - (1 + 2 + \cdots + 2018) = 2019^{2019} - 1009 \cdot 2019 = 2019 \cdot (2019^{2018} - 1009)$ (**2p**)

$2019 \cdot (2019^{2018} - 1009) : 2019 = 2019^{2018} - 1009$ (**1p**)

$2019^{2019} = (2019^{2018} - 1009) + (2019^{2018} - 1009 + 1) + \cdots + (2019^{2018} - 1009 + 2018)$ (**1p**)

b) $$2019^{2019} = 2019^{2018} \cdot 2019 = 2019^{2018}\left(32^2 + 31^2 + 5^2 + 3^2\right)$$
$$= \left(2019^{1009} \cdot 32\right)^2 + \left(2019^{1009} \cdot 31\right)^2 + \left(2019^{1009} \cdot 5\right)^2 + \left(2019^{1009} \cdot 3\right)^2 \quad (\mathbf{3p}).$$

PROBLEMA 4. Scriem în ordine crescătoare numerele naturale de patru cifre diferite, care au suma cifrelor 12. Aflaţi ce poziţie are numărul 2019 în această scriere.

Barem de corectare.

Suma 12, din patru cifre diferite, se poate obţine astfel:

$0 + 1 + 2 + 9$; $0 + 1 + 3 + 8$; $0 + 1 + 4 + 7$; $0 + 1 + 5 + 6$; $0 + 2 + 3 + 7$; $0 + 2 + 4 + 6$;

$0 + 3 + 4 + 5$; $1 + 2 + 3 + 6$; $1 + 2 + 4 + 5$ (**2p**).

Scrierea în ordine crescătoare a numerelor ne arată că în faţa lui 2019 avem numere de forma $\overline{1abc}$. (**2p**)

În total avem $3 \cdot 2 \cdot 1$ de 6 ori, adică 36 de astfel de numere (**2p**).

Deci 2019 este al 37-lea număr (**1p**).

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 16. 02. 2019

BAREM DE CORECTARE - Clasa a VI – a

PROBLEMA 1. Fie numerele naturale nenule a, p şi q. Dacă $ap+1$ este divizibil cu q şi $aq+1$ este divizibil cu p, demonstraţi că numerele p şi q sunt prime între ele şi $a \geq \dfrac{pq-1}{p+q}$.

Barem de corectare.

Fie $d = (p, q)$. Deoarece $d\,|q$ şi $q\,|ap+1$, rezultă că $d\,|ap+1$, iar din $d\,|p$, rezultă că $d\,|ap$ $(\mathbf{2p})$. Aşadar, d divide numerele consecutive ap şi $ap+1$, de unde rezultă că $d = 1$, adică numerele p şi q sunt prime între ele $(\mathbf{1p})$.

Deoarece $p\,|aq+ap+1$, $q\,|aq+ap+1$ şi $(p,q) = 1$ $(\mathbf{2p})$, avem: $pq\,|aq+ap+1 \Rightarrow pq \leq aq+ap+1 \Rightarrow a \geq \dfrac{pq-1}{p+q}$ $(\mathbf{2p})$.

PROBLEMA 2. La un concurs de matematică, elevii au de rezolvat patru probleme. Pentru fiecare problemă se acordă câte un punct din oficiu. Pe lângă punctele din oficiu, elevul mai primeşte puncte astfel: dacă rezolvă corect prima problemă, primeşte încă 3 puncte; dacă rezolvă corect a doua problemă, primeşte încă 6 puncte; dacă rezolvă corect a treia problemă, primeşte încă 12 puncte; dacă rezolvă corect a patra problemă, primeşte încă 24 de puncte. Nu se acordă punctaje intermediare pentru rezolvări incomplete. Arătaţi că dacă doi elevi au acelaşi punctaj, atunci cei doi elevi au rezolvat corect aceleaşi probleme.

Barem de corectare.

Punctajul elevului A este $a = 4 + 3x_1 + 6x_2 + 12x_3 + 24x_4$, cu $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\}$, iar punctajul elevului B este $b = 4 + 3y_1 + 6y_2 + 12y_3 + 24y_4$, cu $y_1, y_2, y_3, y_4 \in \{0,1\}$ $(\mathbf{2p})$.

Dacă $a = b$ rezultă că x_1 şi y_1 au aceeaşi paritate, deci $x_1 = y_1$ $(\mathbf{2p})$.

Prin înlocuire, analog rezultă că $x_2 = y_2$, $x_3 = y_3$ şi $x_4 = y_4$ $(\mathbf{2p})$.

Deci A şi B au aceleaşi probleme rezolvate corect $(\mathbf{1p})$.

PROBLEMA 3. Pe un cerc sunt instalate 2019 becuri, dintre care 1010 sunt aprinse, iar restul sunt stinse. Prin faptul că un bec îşi schimbă starea, se înţelege că cel aprins se stinge şi că cel stins se aprinde. Prin mutare, se înţelege că dacă cineva atinge un bec, atunci cele două becuri vecine becului atins, îşi schimbă starea. Gigel îşi propune să facă mai multe mutări astfel încât să fie toate becurile aprinse simultan. Aflaţi dacă poate să facă acest lucru. Justificaţi!

Barem de corectare.

Iniţial numărul becurilor aprinse este par (**1p**)
Sunt posibile 3 cazuri:

- dacă la o mutare se aprind două becuri, rezultă că numărul becurilor aprinse creşte cu doi, deci rămâne par (**2p**)
- dacă la o mutare se sting două becuri, rezultă că numărul becurilor aprinse scade cu doi, deci rămâne par (**2p**)
- dacă la o mutare se stinge un bec şi se aprinde altul, rezultă că numărul becurilor aprinse rămâne la fel, adică par (**1p**)

În concluzie, indiferent câte mutări face Gigel, numărul becurilor aprinse este par, adică nu poate fi 2019. Deci nu le poate aprinde pe toate simultan (**1p**).

PROBLEMA 4. Fie unghiul ascuţit $\sphericalangle DOE$, $OM \perp OD$ şi $ON \perp OE$, astfel încât $\mathrm{m}\left(\sphericalangle MON\right) = 140^\circ$. Determinaţi măsura unghiului $\sphericalangle XOY$, dacă OX este bisectoarea unghiului $\sphericalangle MOD$ şi OY este bisectoarea unghiului $\sphericalangle NOE$.

Barem de corectare.

Dacă $\sphericalangle DOE \not\subset \mathrm{Int}\,\sphericalangle MON$, atunci $\mathrm{m}\left(\sphericalangle DOE\right) = 360^\circ - (140^\circ + 90^\circ + 90^\circ) = 40^\circ$ (**2p**), iar $\mathrm{m}\left(\sphericalangle XOY\right) = \mathrm{m}\left(\sphericalangle XOD\right) + \mathrm{m}\left(\sphericalangle DOE\right) + \mathrm{m}\left(\sphericalangle EOY\right) = 45^\circ + 40^\circ + 45^\circ = 130^\circ$ (**2p**).

Dacă $\sphericalangle DOE \subset \mathrm{Int}\,\sphericalangle MON$, atunci din $\mathrm{m}\left(\sphericalangle DON\right) = 140^\circ - 90^\circ = 50^\circ$, rezultă că $(OY \subset \mathrm{Int}\,\sphericalangle NOD$, iar din $\mathrm{m}\left(\sphericalangle MOE\right) = 50^\circ$ rezultă că $(OX \subset \mathrm{Int}\,\sphericalangle MOE$ (**1p**). Aşadar, $\sphericalangle XOY = \mathrm{m}\left(\sphericalangle MON\right) - \left(\mathrm{m}\left(\sphericalangle NOY\right) + \mathrm{m}\left(\sphericalangle MOX\right)\right) = 140^\circ - (45^\circ + 45^\circ) = 50^\circ$ (**2p**).

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;
[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 16. 02. 2019

BAREM DE CORECTARE - Clasa a VII – a

PROBLEMA 1. Să se arate că $\{\sqrt{1}\} + \{\sqrt{3}\} + \{\sqrt{5}\} + ... + \{\sqrt{49}\} < 18$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului x.

Barem de corectare.

Deoarece

$$\{\sqrt{1}\} = \{\sqrt{9}\} = \{\sqrt{25}\} = \{\sqrt{49}\} = 0 \quad (\mathbf{1p})$$

$$\{\sqrt{11}\} = \sqrt{11} - [\sqrt{11}] = \sqrt{11} - 3 = \frac{2}{\sqrt{11}+3} < \frac{1}{3} \quad (\mathbf{1p})$$

$$\{\sqrt{17}\} = \sqrt{17} - [\sqrt{17}] = \sqrt{17} - 4 = \frac{1}{\sqrt{17}+4} < \frac{1}{8} \quad (\mathbf{1p})$$

$$\{\sqrt{27}\} = \sqrt{27} - [\sqrt{27}] = \sqrt{27} - 5 = \frac{2}{\sqrt{27}+5} < \frac{1}{5} \quad (\mathbf{1p})$$

$$\{\sqrt{37}\} = \sqrt{37} - [\sqrt{37}] = \sqrt{37} - 6 = \frac{1}{\sqrt{37}+6} < \frac{1}{12} \quad (\mathbf{1p})$$

rezultă că

$$\{\sqrt{1}\} + \{\sqrt{3}\} + \{\sqrt{5}\} + ... + \{\sqrt{49}\} < \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{5} + \frac{1}{12} + 17 \cdot 1 = \frac{89}{120} + 17 < 18 \quad (\mathbf{2p}).$$

PROBLEMA 2. Găsiţi numerele naturale m şi n pentru care

$$\frac{4n}{2m+3} = \frac{n-2}{m}.$$

Barem de corectare.

Din $\dfrac{4n}{2m+3} = \dfrac{n-2}{m}$ avem:

$$m = \frac{3n-6}{2n+4} \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 2n+4 \,|3n-6 \quad (\mathbf{1p})$$

$$\Rightarrow 2n+4 \,|3\,(2n+4) - 2\,(3n-6) \Rightarrow 2n+4 \,|24 \Rightarrow n+2 \,|12 \quad (\mathbf{2p})$$

$$\Rightarrow n \in \{0, 1, 2, 4, 10\} \quad (\mathbf{2p})$$

Cum $\left(n = 0 \Rightarrow m = -\dfrac{3}{2} \notin \mathbb{N}^*\right)$, $\left(n = 1 \Rightarrow m = -\dfrac{1}{2} \notin \mathbb{N}^*\right)$, $(n = 2 \Rightarrow m = 0 \notin \mathbb{N}^*)$, $\left(n = 4 \Rightarrow m = \dfrac{1}{2} \notin \mathbb{N}^*\right)$ şi $(n = 10 \Rightarrow m = 1)$, obţinem soluţia $m = 1$ şi $n = 10$ $(\mathbf{2p})$.

PROBLEMA 3. Fie M şi N mijloacele laturilor $[AD]$, respectiv $[DC]$ ale rombului $ABCD$, $BM \cap AC = \{P\}$, iar $BN \cap AC = \{T\}$.

a) Arătaţi că $MNTP$ este un trapez isoscel;

b) Dacă $AN \cap BD = \{G\}$ şi $GP \perp AB$, demonstraţi că $ABCD$ este un pătrat.

Barem de corectare.

a) Din faptul că MN este linie mijlocie în ΔDAC, rezultă că $MN \parallel TP$ $(\mathbf{1p})$, iar din $BM = BN$ $(\mathbf{1p})$, aplicând teorema lui Thales în triunghiul BMN, obţinem $PM = TN$. Cum $MP \nparallel NT$, rezultă că $MNTP$ este un trapez isoscel $(\mathbf{1p})$;

b) Deoarece P este centrul de greutate al ΔABD şi G este centrul de greutate al ΔDAC $(\mathbf{1p})$, aplicând reciproca teoremei lui Thales în ΔOAD, obţinem că $PG \parallel AD$ $(\mathbf{2p})$. Cum $PG \perp AB$, rezultă că $AD \perp AB$, adică $ABCD$ este un pătrat $(\mathbf{1p})$.

PROBLEMA 4. Pe laturile triunghiului ABC considerăm punctele $M \in (BC)$, $N \in (AC)$ şi $P \in (AB)$, astfel încât $AM \cap BN \cap CP = \{O\}$. Să se arate că $\dfrac{MO}{MA} + \dfrac{NO}{NB} + \dfrac{PO}{PC} = 1$.

Barem de corectare.

Deoarece $\dfrac{MO}{MA} = \dfrac{A_{BOC}}{A_{ABC}}$ $(\mathbf{2p})$, $\dfrac{NO}{NB} = \dfrac{A_{AOC}}{A_{ABC}}$ $(\mathbf{2p})$ şi $\dfrac{PO}{PC} = \dfrac{A_{AOB}}{A_{ABC}}$ $(\mathbf{2p})$,

obţinem că $\dfrac{MO}{MA} + \dfrac{NO}{NB} + \dfrac{PO}{PC} = \dfrac{A_{BOC}}{A_{ABC}} + \dfrac{A_{AOC}}{A_{ABC}} + \dfrac{A_{AOB}}{A_{ABC}} = 1$ $(\mathbf{1p})$.

---

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 16. 02. 2019

BAREM DE CORECTARE - Clasa a VIII – a

PROBLEMA 1. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub, M mijlocul muchiei $D'C'$ şi $DT \perp MC, T \in MC$.

a) Să se arate că $DT \perp (MBC)$;

b) Dacă distanţa dintre dreptele AD şi BM este $a\sqrt{5}$, determinaţi lungimea muchiei cubului.

Barem de corectare.

a) Deoarece $DT \perp MC$ şi $BC \perp (DCC')$, rezultă că $DT \perp (MBC)$ (**3p**);

b) Dacă x este lungimea muchiei cubului, atunci $DT = \frac{2 \cdot A_{\Delta MDC}}{MC} \cdot \frac{x^2}{\frac{x\sqrt{5}}{2}} = \frac{2x}{\sqrt{5}}$ (**1p**). Deoarece $AD \parallel (MBC)$ şi $MB \subset (MBC)$, rezultă că $\mathrm{d}(AD, BM) = \mathrm{d}(AD, (MBC)) = DT = \frac{2x}{\sqrt{5}}$ (**2p**), de unde $x = \frac{5a}{2}$ (**1p**).

PROBLEMA 2.

a) Demonstraţi că $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} \leq x + y + z, \forall\ x, y, z > 0$.

b) Să se afle maximul expresiei $\sqrt{ab+ac} + \sqrt{ab+bc} + \sqrt{ac+bc}$, unde $a, b, c > 0$ şi $a + b + c = 2019$.

Barem de corectare.

a) Din inegalitatea mediilor, $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} \leq \frac{x+y}{2} + \frac{y+z}{2} + \frac{x+z}{2} = x + y + z$ (**3p**).

b) Avem $\sqrt{ab+ac} + \sqrt{ab+bc} + \sqrt{ac+bc} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2a(b+c)} + \sqrt{2b(a+c)} + \sqrt{2c(a+b)}\right) \leq$
$\leq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2a+b+c}{2} + \frac{a+2b+c}{2} + \frac{a+b+2c}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(2a+2b+2c) = 2019\sqrt{2}$ (**3p**).
Maximul este $2019\sqrt{2}$ şi se obţine pentru $a = b = c = 673$ (**1p**).

PROBLEMA 3. Cei 28 de colegi ai lui Gigel au venit în vizită la el. Gigel are un baton de ciocolată sub formă de paralelipiped dreptunghic, $ABCDA'B'C'D'$, cu $AB = 5$ cm, $BC = 3$ cm şi $AA' = 4$ cm, pe care doreşte să-l împartă cu colegii şi fratele lui, astfel încât fiecare să primească un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 1 cm, 1 cm şi 2 cm. Fratele lui fiind mai mic, se grăbeşte şi îşi mănâncă porţia, încălcând însă regula stabilită de Gigel. Ştiind că fratele lui mănâncă două cubuleţe, fiecare cu muchia de 1 cm, unul cu un vârf în A şi celălalt cu un vârf în B, aflaţi dacă Gigel mai poate împărţi ciocolata după regula stabilită de el iniţial.

Barem de corectare.

Considerăm că paralelipipedul mare este împărţit în $5 \times 3 \times 4 = 60$ de cubuleţe cu latura de 1 cm (**2p**);

Colorăm fiecare cubuleţ cu una dintre culorile albastru sau galben, astfel încât să nu fie două cubuleţe vecine colorate la fel, iar cubuleţul cu un vârf în A să fie colorat albastru (**1p**).

Rezultă că sunt 30 de cubuleţe albastre şi 30 galbene, iar cubuleţul cu un vârf în B este albastru (**1p**).

Fratele lui Gigel va mânca două cubuleţe albastre, deci rămân 30 galbene şi 28 albastre (**1p**).

Dacă Gigel ar putea împărţi ciocolata după regula stabilită de el, atunci fiecare ar trebui să primească un paralelipiped format dintr-un cubuleţ galben şi unul albastru, ceea ce nu se poate (**2p**).

PROBLEMA 4.

a) Să se demonstreze că restul împărţirii unui pătrat perfect la 3, nu poate fi 2.

b) Fie $a = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2 + 11} \in \mathbb{Q}$, unde p, q şi r sunt numere prime, cu $p < q < r$. Să se arate că $p = 2$, iar apoi să se determine numerele q şi r.

Barem de corectare.

a) Rezultă din faptul că pentru orice număr natural k, avem $(3k)^2 \in M_3$, $(3k+1)^2 \in M_3 + 1$, iar $(3k+2)^2 \in M_3 + 1$ (**3p**).

b) Dacă $p \neq 2$, atunci p, q şi r sunt toate numere impare, de unde rezultă că $p^2 + q^2 + r^2 + 11 \in M_4 + 2$, adică $p^2 + q^2 + r^2 + 11$ nu este pătrat perfect. Contradicţie cu $a \in \mathbb{Q}$. Deci $p = 2$ (**2p**).
Dacă $q > 3$, atunci $q^2, r^2 \in M_3 + 1 \Rightarrow p^2 + q^2 + r^2 + 11 = q^2 + r^2 + 15 \in M_3 + 2$, adică $p^2 + q^2 + r^2 + 11$ nu este pătrat perfect. Deci $q = 3$ (**1p**).
Aşadar, $a^2 = r^2 + 24 \Leftrightarrow (a-r)(a+r) = 24$. Cum r este impar, rezultă că şi a este impar. Astfel, cum $a - r$ şi $a + r$ sunt pare, cu $a - r < a + r$, avem posibilităţile $(a - r = 2,\ a + r = 12 \Rightarrow r = 5)$ sau $(a - r = 4,\ a + r = 6 \Rightarrow r = 1)$. Deci $r = 5$ (**1p**).

[1] Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;
[2] Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 16. 02. 2019

BAREM DE CORECTARE - Clasa a IX – a

PROBLEMA 1. Fie $x, y, z > 0$ numere reale cu proprietatea $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3$. Să se demonstreze inegalităţile următoare:

a) $x+y+z \geq 3$;

b) $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2 \geq 12$.

Barem de corectare.

a) Inegalitatea $\dfrac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} \leq \dfrac{x+y+z}{3}$ implică inegalitatea cerută (**2p**).

b) Deoarece $x^2+y^2+z^2 \geq \frac{1}{3}(x+y+z)^2 \geq 3$ (**3p**), obţinem $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2 = x^2+y^2+z^2+2(x+y+z)+3 \geq 12$ (**2p**).

PROBLEMA 2. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu raţia pozitivă r şi primul termen $a_1 \geq \frac{1}{2}$. Determinaţi partea întreagă a numărului

$$A=\sqrt{1+\frac{r}{a_1a_2}}+\sqrt{1+\frac{r}{a_2a_3}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{r}{a_na_{n+1}}},\ n\geq 2.$$

Barem de corectare.

Evident, $A \geq n$ (**2p**). Deoarece $\sqrt{1+x} \leq \frac{2+x}{2}=1+\frac{x}{2}$, $\forall x \geq -1$ (**1p**), avem

$$\begin{aligned} A &\leq n+\frac{1}{2}\left(\frac{r}{a_1a_2}+\frac{r}{a_2a_3}+\cdots+\frac{r}{a_na_{n+1}}\right)= \\ &= n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)= \\ &= n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)<n+\frac{1}{2a_1}\leq n+1 \quad (\mathbf{3p}). \end{aligned}$$

Aşadar, $[A]=n$ (**1p**).

PROBLEMA 3. Pe laturile triunghiului ABC se consideră punctele $A_1 \in (BC)$, $B_1 \in (CA)$ şi $C_1 \in (AB)$, astfel încât AA_1, BB_1 şi CC_1 sunt concurente. Cercul circumscris triunghiului $A_1B_1C_1$ intersectează (a doua oară) BC, CA şi AB, respectiv, în punctele A_2, B_2 şi C_2. Arătaţi că:

a) $AC_1 \cdot AC_2 = AB_1 \cdot AB_2$;

b) dreptele AA_2, BB_2, CC_2 sunt concurente.

Barem de corectare.

a) Rezultă din asemănarea triunghiurilor AC_1B_2 şi AB_1C_2 (**2p**).

b) Din Teorema lui Ceva, avem $\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1$ (**2p**). Deoarece $AC_1 \cdot AC_2 = AB_1 \cdot AB_2$, $BA_1 \cdot BA_2 = BC_1 \cdot BC_2$ şi $CB_1 \cdot CB_2 = CA_1 \cdot CA_2$, rezultă că $\frac{BA_2}{A_2C} \cdot \frac{CB_2}{B_2A} \cdot \frac{AC_2}{C_2B} = 1$ (**2p**). Aplicăm reciproca Teoremei lui Ceva (**1p**).

PROBLEMA 4. În patrulaterul convex $ABCD$ se notează cu G centrul de greutate al triunghiului BCD şi cu H ortocentrul triunghiului ACD. Să se demonstreze că punctele A, B, G, H reprezintă, în această ordine, vârfurile unui paralelogram, dacă şi numai dacă G este centrul cercului circumscris triunghiului ACD.

Barem de corectare.

Fie O centrul cercului circumscris $\triangle ACD$.

Au loc relaţiile $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}$ (**2p**) şi $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HD} = 2\overrightarrow{HO}$ (**2p).**

Astfel, $ABGH$ este paralelogram dacă şi numai dacă

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BG} &= \overrightarrow{AH} \Leftrightarrow \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HD} - 2\overrightarrow{HO} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DH} + 2\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{OH} \quad (\mathbf{3p}). \end{aligned}$$

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 16. 02. 2019

BAREM DE CORECTARE - Clasa a X – a

PROBLEMA 1.

a) Să se arate că $\frac{3}{2} < \log_2 3 < \frac{5}{3}$.

b) Să se determine numărul natural n pentru care $n < \log_2 3 + \log_3 4 + \log_4 6 + \log_6 8 < n + 1$.

Barem de corectare.

a) Verificare $\quad$ (**1p**) ;

b) Aplicăm inegalitatea mediilor şi avem

$$\log_2 3 + \log_3 4 + \log_4 6 + \log_6 8 \geq 4\sqrt[4]{\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 6 \cdot \log_6 8} = 4\sqrt[4]{3} > 5 \qquad (\mathbf{3p})\,.$$

Dacă $x = \log_2 3$, atunci $\frac{3}{2} < x < \frac{5}{3}$. Cum $\log_3 4 = \frac{2}{x}$, $\log_4 6 = \frac{1+x}{2}$ şi $\log_6 8 = \frac{3}{1+x}$, rezultă că $x + \frac{2}{x} + \frac{1+x}{2} + \frac{3}{1+x} < \frac{83}{15} < 6$. Deci $n = 5 \quad$ (**3p**) .

PROBLEMA 2. Determinaţi numerele reale $a \leq 1$ şi $b > 0$, pentru care ecuaţia

$$\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x} = \frac{x^2+b+1}{\sqrt{x^2+b}}$$

are soluţii reale.

Barem de corectare.

Pentru orice număr real x, $\frac{x^2+b+1}{\sqrt{x^2+b}} = \sqrt{x^2+b} + \frac{1}{\sqrt{x^2+b}} \geq 2 \quad$ (**3p**) .

Avem $\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x} \geq 2$, de unde rezultă $\sqrt[3]{a+x} \geq 2 - \sqrt[3]{a-x}$. Ridicăm la cub şi notăm $\sqrt[3]{a-x} = t$. Deducem că $t^2 - 2t + \frac{4-a}{3} \leq 0$, deci $(t-1)^2 \leq \frac{a-1}{3}$ şi astfel se impune $a \geq 1 \quad$ (**3p**) .

Din ipoteză, obţinem că $a = 1$, $t = 1$, $x = 0$, $b = 1 \quad$ (**1p**) .

PROBLEMA 3. Considerăm familia de funcţii $f_\alpha : \mathbb{N} \to \Gamma$, $f_\alpha(n) = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

a) Demonstraţi că f_α nu este surjectivă, pentru nicio valoare reală a lui α;

b) Demonstraţi că oricare ar fi $m \in \mathbb{N}^*$, există $\alpha \in \mathbb{R}$, astfel încât imaginea funcţiei f_α să aibă m elemente;

c) Demonstraţi că oricare ar fi $\alpha \in \mathbb{R}$, funcţia f_α este sau injectivă sau periodică.

Barem de corectare.

a) Evident, f_0 nu este surjectivă. Presupunem că există $\alpha \in \mathbb{R}^*$, astfel încât f_α să fie surjectivă. Rezultă că $\forall\ \beta \in \mathbb{R}$, $\exists\ n \in \mathbb{N}$, astfel încât $f_\alpha(n) = \cos\beta + i\sin\beta$, deci $\cos n\alpha + i\sin n\alpha = \cos\beta + i\sin\beta \Leftrightarrow n\alpha = \beta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Pentru $\beta = 0$, există $n_0 \in \mathbb{N}$, astfel încât $n_0\alpha = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Rezultă $n\alpha = \beta + n_0\alpha$, adică $n - n_0 = \dfrac{\beta}{\alpha} \in \mathbb{Z}$, $\forall\ \beta \in \mathbb{R}$, contradicţie. Deci f_α nu este surjectivă pentru nicio valoare reală a lui α $\quad(\mathbf{2p})$.

b) Pentru $m \in \mathbb{N}^*$, există $\alpha \in \mathbb{R}$, şi anume $\alpha = \dfrac{2\pi}{m}$, astfel ca
$\operatorname{Im} f_\alpha = \{1,\ \cos\alpha + i\sin\alpha,\ \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha, \ldots, \cos(m-1)\alpha + i\sin(m-1)\alpha\}$ $\quad(\mathbf{2p})$.

c) $f_\alpha(n_1) = f_\alpha(n_2) \Rightarrow \cos n_1\alpha + i\sin n_1\alpha = \cos n_2\alpha + i\sin n_2\alpha \Rightarrow n_1\alpha = n_2\alpha + 2k\pi \Rightarrow (n_1 - n_2)\alpha = 2k\pi$

Dacă $\alpha = 0$, atunci $f_0(n) = 1$ şi f este periodică. Dacă $\alpha \neq 0$ şi $k = 0$ rezultă $n_1 = n_2$ şi f_α este injectivă.

Dacă $\alpha \neq 0$ şi $k \neq 0$, rezultă $\dfrac{n_1 - n_2}{2k} = \dfrac{\pi}{\alpha}$. Dacă $\dfrac{\pi}{\alpha} \in \mathbb{Q}$, atunci f_α este periodică cu perioada principală $T = \dfrac{2\pi}{\alpha}$. Dacă $\dfrac{\pi}{\alpha} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ atunci $\dfrac{n_1 - n_2}{2k} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, contradicţie. Deci f_α este injectivă $\quad(\mathbf{3p})$.

PROBLEMA 4. Considerăm triunghiul ABC cu vârfurile de afixe a, b, c, cu $|a| = |b| = |c| = R$. Înălţimea dusă din vârful A intersectează cercul circumscris triunghiului în punctul D, de afix d.

a) Exprimaţi d în funcţie de a, b, c;

b) Fie muţimea $\mathcal{R}_n = \left\{ z_k = R\left(\cos\dfrac{2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{2k\pi}{n}\right) \middle| \, 0 \leq k \leq n-1 \right\}$, unde $n \geq 5$ este impar şi fie $k, j, l \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ fixate, două câte două distincte, astfel încât $a = z_k$, $b = z_j$, $c = z_l$. Este posibil ca d să fie element al mulţimii $\mathcal{R}_n$? Justificaţi răspunsul.

Barem de corectare.

a) $AD \perp BC \Leftrightarrow \dfrac{a-d}{b-c} \in i\,\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \dfrac{a-d}{b-c} = \dfrac{\overline{d} - \overline{a}}{\overline{b} - \overline{c}}$. Rezultă $\dfrac{a-d}{b-c} = \dfrac{a-d}{b-c}\left(-\dfrac{bc}{ad}\right)$. Avem $ad = -bc \Rightarrow d = -\dfrac{bc}{a}$ $\quad(\mathbf{3p})$.

b) Presupunem că $d \in \mathcal{R}_n$; din $a)$ avem $d = -\dfrac{z_j z_l}{z_k} = -z_{j+l-k}$ $\;(\mathbf{1p})$.

Demonstrăm că dacă n este impar şi $z \in \mathcal{R}_n$, atunci $-z \notin \mathcal{R}_n$.

Dacă $z \in \mathcal{R}_n$ există $m \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ astfel încât $z = R\left(\cos\dfrac{2m\pi}{n} + i\sin\dfrac{2m\pi}{n}\right)$, deci $-z = R\left(\cos\left(\dfrac{2m\pi}{n} + \pi\right) + i\sin\left(\dfrac{2m\pi}{n} + \pi\right)\right)$. Rezultă $-z \in \mathcal{R}_n \Leftrightarrow \exists p \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, astfel încât $2m\pi + n\pi = 2p\pi$ şi n este par $\quad(\mathbf{3p})$.

---

[1] Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2] Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 16. 02. 2019

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XI – a

PROBLEMA 1. Se consideră matricele $A \in M_3(\mathbb{R})$ şi $C = A - A^t$.

a) Să se demonstreze că $\det(C) = 0$;

b) Să se arate că dacă $\operatorname{tr}(A^2) = \operatorname{tr}(A \cdot A^t)$, atunci $C = O_3$.

Barem de corectare.

a) Din $\det(C) = \det(C^t) = \det(-C) = -\det(C)$, rezultă că $\det(C) = 0$ (**4p**);

b) Deoarece $\operatorname{tr}(C \cdot C^t) = \operatorname{tr}(A \cdot A^t) + \operatorname{tr}(A^t \cdot A) - \operatorname{tr}(A^2) - \operatorname{tr}((A^t)^2) = 2 \cdot (\operatorname{tr}(A \cdot A^t) - \operatorname{tr}(A^2)) = 0$ (**2p**), iar $\operatorname{tr}(C \cdot C^t)$ este suma pătratelor elementelor lui $C \in M_3(\mathbb{R})$, din $\operatorname{tr}(C \cdot C^t) = 0$, obţinem că $C = O_3$ (**1p**).

PROBLEMA 2. Fie matricele $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ şi $\varepsilon = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{C}$. Să se demonstreze că dacă $\det(A + \varepsilon B) \in \mathbb{R}$, atunci $\det(A - B) = \det(A) - \det(B)$.

Barem de corectare.

Avem $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ şi $\varepsilon^3 = 1$ (**1p**).

Deoarece $\det(A + xB) = \det(A) + a \cdot x + b \cdot x^2 + \det(B) \cdot x^3$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ (**2p**), din $\det(A + \varepsilon B) = \det(A) + a \cdot \varepsilon + b \cdot \varepsilon^2 + \det(B) \cdot \varepsilon^3 = \underbrace{(\det(A) + \det(B) - b)}_{\in \mathbb{R}} + (a - b) \cdot \varepsilon \in \mathbb{R}$, rezultă că $a = b$ (**2p**).

Aşadar, $\det(A - B) = \det(A) - a + b - \det(B) = \det(A) - \det(B)$ (**2p**).

PROBLEMA 3. Fie şirurile $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ definite prin $a_1 = 1$ şi $a_{n+1} = \dfrac{1+a_n}{\sqrt{n+1}}$, $n \geq 1$, respectiv $b_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

a) Să se demonstreze că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;

b) Să se demonstreze că $b_n > \sqrt{n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$;

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_n}$.

Barem de corectare.

a) Deoarece $0 \leq a_n \leq 2$, pentru $n \geq 1$ $(\mathbf{1p})$, oţinem că $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} < a_{n+1} < \dfrac{3}{\sqrt{n+1}}$, de unde rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ $(\mathbf{2p})$;

b) Inducţie matematică $(\mathbf{1p})$;

c) Deoarece şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător şi nemărginit $(\mathbf{1p})$, pe baza lemei lui Cesaro$-$Stolz, avem $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}} = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + a_n) = 1$ $(\mathbf{2p})$.

PROBLEMA 4. Să se determine valorile lui $a \in \mathbb{N}$, pentru care şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, definit prin $x_n = cos\left(\pi\sqrt{n^2 + an + 1}\right)$, este convergent.

Barem de corectare.

Deoarece $x_n = (-1)^n \cdot \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + an + 1} - n\pi\right) = (-1)^n \cdot \cos\dfrac{(an+1)\pi}{\sqrt{n^2 + an + 1} + n} = (-1)^n \cdot \cos\dfrac{\left(a + \frac{1}{n}\right)\pi}{\sqrt{1 + a\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1}$ $(\mathbf{3p})$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\dfrac{\left(a + \frac{1}{n}\right)\pi}{\sqrt{1 + a\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1} = \cos\dfrac{a\pi}{2}$, rezultă că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent la 0, dacă a este impar $(\mathbf{2p})$ şi este divergent, dacă a este par $(\mathbf{2p})$.

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 16. 02. 2019

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XII – a

PROBLEMA 1. Se consideră funcţia $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \ln(\sin x)$ şi F o primitivă a sa. Să se arate că există şi este finită limita $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x)$.

Barem de corectare.

Deoarece $\int \ln(\sin x)\, dx = x \cdot \ln(\sin x) - \int \frac{x \cdot \cos x}{\sin x} dx$ **(2p)**, considerăm funcţia

$$g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x \cdot \cos x}{\sin x}, & x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

care este continuă, deci admite primitive **(3p)**.

Fie G o primitivă a funcţiei g, cu $F(x) = x \cdot \ln(\sin x) - G(x)$, pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Atunci, deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} G(x) = G(0) \in \mathbb{R}$ şi

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (x \cdot \ln(\sin x)) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\frac{x}{\sin x} \cdot x \cos x\right) = 0,$$

obţinem că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x) = -G(0) \in \mathbb{R}$ **(2p)**.

PROBLEMA 2. Se consideră mulţimea $G = (-1, 1)$ şi operaţia $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$. Să se arate că $(G, *)$ este un grup comutativ şi să se calculeze limita şirului $(x_n)_{n\geq 1}$, unde $x_n = \underbrace{x * x * \ldots * x}_{\text{de } n \text{ ori}}$, $x \in G$.

Barem de corectare.

Demonstrarea faptului că $(G, *)$ este un grup comutativ **(3p)**;

Demonstrarea faptului că $x_n = \frac{(1+x)^n - (1-x)^n}{(1+x)^n + (1-x)^n}$ **(2p)**;

Calculul limitei $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ **(2p)**;

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \frac{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n - 1}{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n + 1} = -1$, pentru $x \in (-1, 0)$;

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \frac{1 - \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n}{1 + \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n} = 1$, pentru $x \in (0, 1)$;

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, pentru $x = 0$.

PROBLEMA 3. Fie H_1 şi H_2 două părţi stabile finite a lui $\mathbb{C}^*$ în raport cu operaţia de înmulţire, având m, respectiv n elemente. Să se arate că dacă $(m,n)=1$, atunci $H_1 \cap H_2 = \{1\}$.

Barem de corectare.

Deoarece H_1 şi H_2 sunt părţi stabile a lui $\mathbb{C}^*$, cu m, respectiv n elemente, rezultă că $H_1 = U_m = \{z \in \mathbb{C}^* \,|z^m = 1\}$ şi $H_2 = U_n = \{z \in \mathbb{C}^* \,|z^n = 1\}$ $(\mathbf{3p})$.

Dacă $z \in H_1 \cap H_2 = U_m \cap U_n$, atunci există un $k \in \{0,1,...,m-1\}$ şi un $k' \in \{0,1,...,n-1\}$ astfel încât $z = \cos\frac{2k\pi}{m} + i\sin\frac{2k\pi}{m} = \cos\frac{2k'\pi}{n} + i\sin\frac{2k'\pi}{n} \Leftrightarrow \cos\frac{2k\pi}{m} = \cos\frac{2k'\pi}{n}$ şi $\sin\frac{2k\pi}{m} = \sin\frac{2k'\pi}{n}$ $(\mathbf{2p})$. Aşadar,

$$\sin\left(\frac{k\pi}{m} - \frac{k'\pi}{n}\right)\cdot\sin\left(\frac{k\pi}{m} + \frac{k'\pi}{n}\right) = \sin\left(\frac{k\pi}{m} - \frac{k'\pi}{n}\right)\cdot\cos\left(\frac{k\pi}{m} + \frac{k'\pi}{n}\right) = 0,$$

de unde obţinem: $\sin\left(\frac{k}{m} - \frac{k'}{n}\right)\pi = 0 \Rightarrow \frac{k}{m} = \frac{k'}{n} \overset{(m,n)=1}{\Longrightarrow} k = k' = 0 \Rightarrow z = 1$ $(\mathbf{2p})$.

PROBLEMA 4. Să se arate că dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie neconstantă şi periodică, fară perioadă principală, atunci aceasta nu admite primitive şi nu este integrabilă pe niciun interval $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

Barem de corectare.

Fie F o primitivă a lui f şi $(T_n)_{n\geq 0}$ un şir de perioade a lui f, convergent către 0.

Deoarece $F'(x+T_n) = f(x+T_n) = f(x) = F'(x)$, deducem că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, există $C_n \in \mathbb{R}$, astfel încât $F(x+T_n) - F(x) = C_n$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Pentru $x = 0$ obţinem $C_n = F(T_n) - F(0)$ $(\mathbf{2p})$, de unde

$$f(x) = F'(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{F(x+T_n) - F(x)}{T_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{F(T_n) - F(0)}{T_n} = F'(0) = f(0).$$

Contradicţie cu faptul că f este neconstantă $(\mathbf{2p})$.

În continuare vom demonstra că f nu este integrabilă pe intervalul $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

Functia f nefiind constantă, rezultă că există $\beta_1, \beta_2 \in \operatorname{Im} f$, astfel încât $\beta_1 \neq \beta_2$.

Dacă $(T_n)_{n\geq 0}$ este un şir de perioade a lui f, convergent către 0, atunci pentru orice interval de forma $[x, x+\varepsilon]$, unde $x \in \mathbb{R}$ şi $\varepsilon > 0$, există un T_n astfel încât $[x, x+T_n] \subset [x, x+\varepsilon]$ şi $\{\beta_1, \beta_2\} \subset f(x, x+T_n)$. Aşadar, $\{\beta_1, \beta_2\} \subset f(x, x+\varepsilon)$.

Fie $\Delta_n = \left(x_0^n, x_1^n, ..., x_{k_n}^n\right)$ un şir de diviziuni a intervalului $[a,b]$, cu $\lim_{n\to\infty}\|\Delta_n\| \to 0$. Putem alege sistemele de puncte intermediare $\xi^n = \left(\xi_1^n, \xi_2^n, ..., \xi_{k_n}^n\right)$ şi $\xi'^n = \left(\xi_1'^n, \xi_2'^n, ..., \xi_{k_n}'^n\right)$, astfel încât $f(\xi_1^n) = ... = f\left(\xi_{k_n}^n\right) = \beta_1$ şi $f(\xi_1'^n) = ... = f\left(\xi_{k_n}'^n\right) = \beta_2$ $(\mathbf{2p})$.

Deoarece $\sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n) \to (b-a)\beta_1$, iar $\sigma_{\Delta_n}(f, \xi'^n) \to (b-a)\beta_2$, rezultă că funcţia f nu este integrabilă pe $[a,b]$ $(\mathbf{1p})$.

---

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.