OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 25. 02. 2017

Clasa a V – a

PROBLEMA 1. Aflaţi câtul şi restul împărţirii numărului $N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100 + 900$ la 440.

PROBLEMA 2. Demonstraţi că

$$\left(2016^{n+1} + 2017^{n+1} + 2016^{n} - 2017^{n}\right) \vdots\, 2016 \cdot 2017,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

PROBLEMA 3. Determinaţi numerele naturale $\overline{abc}$ şi $\overline{xy}$, pentru care

$$\overline{abc} + \overline{bc} + c = 2^{\overline{xy}} + 57.$$

PROBLEMA 4. Pe o masă sunt 9 cartonaşe. Pe fiecare cartonaş este scris unul dintre numerele

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14$$

astfel încât nu există două cartonaşe cu acelaşi număr. Gigel şi Costel iau fiecare câte 4 dintre cele 9 cartonaşe. Aflaţi ce număr este pe cartonaşul rămas pe masă, ştiind că suma numerelor de pe cartonaşele luate de Gigel, este de 5 ori mai mare decât suma numerelor de pe cartonaşele luate de Costel.

[1]Timpul efectiv de lucru este de 2 ore;
[2]Toate problemele sunt obligatorii;
[3]Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 25. 02. 2017

Clasa a VI – a

PROBLEMA 1. *a*) Să se aducă la forma ireductibilă fracţia $\dfrac{1710171}{1320132}$.

b) Fie fracţia ireductibilă $\dfrac{p}{q}$, unde $p, q \in \mathbb{N}^*$, $p < q$. Demonstraţi că fracţia $1 - \dfrac{p}{q}$ este de asemenea ireductibilă.

PROBLEMA 2. Determinaţi numerele naturale $\overline{abc}$ pentru care $[a, b, c]^3 = \overline{abc}$. S-a notat cu $[a, b, c]$ cel mai mic multiplu comun al numerelor a, b, c.

(G.M. 11/2016)

PROBLEMA 3. Andrei a desenat o dreaptă pe care a colorat cu roşu mai mult de două puncte. Apoi a colorat cu albastru câte un punct, între oricare două puncte consecutive colorate anterior. În continuare, a colorat cu galben câte un punct între oricare două puncte consecutive colorate deja. Andrei a continuat procedeul descris, folosind culorile verde şi respectiv, negru.

a) Dacă Andrei a colorat 7 puncte albastre, câte puncte a colorat în total?

b) Andrei a colorat un număr oarecare de puncte cu roşu. Arătaţi că există o singură culoare cu care Andrei a colorat un număr impar de puncte.

PROBLEMA 4. Fie A, B, C, D, E şi F şase puncte coliniare (în această ordine) şi un punct O, $O \notin AB$. Să se arate că:

a) dacă $2AC = AB + AD$ şi $2CF = AF + EF$, atunci $(AB) \equiv (DE)$;

b) dacă $\sphericalangle AOD \equiv \sphericalangle BOE \equiv \sphericalangle COF$, iar $[OC$ şi $[OD$ sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle BOD$, respectiv $\sphericalangle COE$, atunci $5m(\sphericalangle COD) = m(\sphericalangle AOF)$.

[1]Timpul efectiv de lucru este de 2 ore;
[2]Toate problemele sunt obligatorii;
[3]Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 25. 02. 2017

Clasa a VII – a

PROBLEMA 1. *a*) Să se rezolve ecuaţia $\frac{x+4}{5}+\frac{x+5}{6}+\ldots+\frac{x+98}{99}+\frac{x+99}{100}=96$;

b) Să se demonstreze că $\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{5}+\frac{\sqrt{12}}{7}+\ldots+\frac{\sqrt{n(n+1)}}{2n+1}\leq\frac{n}{2}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

PROBLEMA 2. *a*) Fie numerele $x=2+4+6+\ldots+4034$ şi

$$y=2017\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2018}\right).$$

Arătaţi că numărul $a=x-2018\cdot y$ este pătrat perfect;

b) Fie $a,b\in\mathbb{R}$, astfel încât $a+b=3\sqrt{2}-10$. Demonstraţi că $\left|a+\sqrt{2}\right|+|b+4|\geq 6-4\sqrt{2}$.

PROBLEMA 3. Fie $ABCD$ un trapez cu $AB\parallel CD$, E mijlocul lui (AB), F mijlocul lui (CD) şi $AF\cap DE=\{P\}$, $BF\cap CE=\{Q\}$. Să se arate că:

a) $PQ\parallel AB$

b) $PQ=\frac{AB\cdot CD}{AB+CD}$

PROBLEMA 4. Fie $ABCD$ un paralelogram, $M\in(AB)$, $AM=2MB$, $DM\cap BC=\{N\}$. Ştiind ca aria triunghiului MNB este egală cu $24\ cm^2$, calculaţi aria patrulaterului $ANCD$.

[1] Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2] Toate problemele sunt obligatorii;
[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 25. 02. 2017

Clasa a VIII – a

PROBLEMA 1. Arătaţi că:

a) $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$, pentru orice număr natural n, $n \geq 2$;

b) $\frac{3}{28} + \frac{3}{63} + \frac{3}{112} + \ldots + \frac{3}{7 \cdot 2017^2} < \frac{1}{2}$.

PROBLEMA 2. Fie paralelogramele $ABCD$ şi $CDEF$ situate în plane diferite astfel încât $DE = DA$, $AC = DF$ şi $AE \perp AB$. Ştiind că $EG \perp CD$, $G \in CD$, arătaţi că :

a) $AB \perp (AGE)$;

b) $G = D$.

PROBLEMA 3. Fiecărui punct M din spaţiu i se asociază numărul real m şi fiecărui triunghi echilateral MNP din spaţiu i se asociază numărul real $m + n + p$. Fie cubul $ABCDEFGH$.

a) Să se arate că $BDEG$ este tetraedru regulat;

b) Aflaţi $a + c + d + h$, ştiind că $m + n + p = \sqrt{6}$, pentru orice triunghi echilateral MNP din spaţiu.

PROBLEMA 4. Într-un paralelipiped dreptunghic se află n pitici astfel încât măsurând distanţele dintre ei toate sunt diferite. La un moment dat, fiecare pitic sare pe locul piticului cel mai apropiat de el. Să se afle cel mai mare număr de pitici care pot fi în acelaşi loc după săritură, dacă în momentul săriturii toţi se află pe bază.

[1]Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2]Toate problemele sunt obligatorii;
[3]Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 25. 02. 2017

Clasa a IX – a

PROBLEMA 1. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, cu $x_1 = \frac{3}{2}$ şi $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2,\ \forall\ n \geq 1$.

a) Să se demonstreze că $x_n = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}},\ \forall\ n \geq 1$;

b) Să se calculeze partea întreagă a numărului $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_{2017}$.

PROBLEMA 2. Demonstraţi că:

a) dacă $a, b > 0$, atunci $\frac{1}{\sqrt{ab}} \leq \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b}$;

b) dacă $a, b, c > 0$ şi $a + b + c = 1$, atunci $\sqrt{\frac{bc}{a+bc}} + \sqrt{\frac{ac}{b+ac}} + \sqrt{\frac{ab}{c+ab}} \leq \frac{3}{2}$.

PROBLEMA 3. Fie $ABCD$ un patrulater convex cu $AB > CD$, iar H_1 şi H_2 ortocentrele triunghiurilor ACD şi BCD. Să se demonstreze că dacă ABH_2H_1 este dreptunghi, atunci $ABCD$ este trapez isoscel.

PROBLEMA 4. Fie D un punct fix pe mediana AA' a triunghiului ABC (unde, $A' \in (BC)$). O dreaptă variabilă dusă prin D intersectează segmentele (AB) şi (AC) în M, respectiv în N. Dacă $MM' \parallel AC,\ NN' \parallel AB$, cu $M', N' \in (BC)$, să se arate că $\frac{1}{CM'} + \frac{1}{BN'}$ este constant.

[1]Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2]Toate problemele sunt obligatorii;
[3]Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 25. 02. 2017

Clasa a X – a

PROBLEMA 1. Fie $z \in \mathbb{C}$, astfel încât $z^2 - z\sqrt{2} + 1 = 0$. Calculaţi :

$a)$ $|z|$; $b)$ $\left|z^{2017} + \dfrac{1}{z^{2017}}\right|$.

PROBLEMA 2. Fie funcţia $f : \{1, 2, 3, ..., 2017\} \to \{1, 2, 3, ..., 2017\}$, astfel încât

$$(f \circ f)(x) + 2017x = 2018 \cdot f(x), \quad \forall\ x \in \{1, 2, 3, ..., 2017\}.$$

$a)$ Arătaţi că f este injectivă.

$b)$ Determinaţi funcţia f.

PROBLEMA 3. Se consideră funcţiile $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite prin $f_1(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 18}$ şi $f_2(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 8}$. Aflaţi:

$a)$ $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f_1(x) + \min\limits_{x\in\mathbb{R}} f_2(x)$;

$b)$ $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} (f_1(x) + f_2(x))$.

PROBLEMA 4. Se consideră numerele naturale distincte $a_1, a_2, ..., a_{2017}$ mai mari decât 2. Să se arate că:

$$\log_{2017} 2 + \sum_{i=1}^{2017} \log_{2017}\left(1 - \frac{1}{a_i^2}\right) > 0.$$

[1] Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2] Toate problemele sunt obligatorii;
[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 25. 02. 2017

Clasa a XI – a

PROBLEMA 1. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(a_1\sqrt{x+1}+a_2\sqrt{x+2}+\ldots+a_{2017}\sqrt{x+2017}\right)$, unde $a_1, a_2, \ldots, a_{2017}\in\mathbb{R}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$.

PROBLEMA 2. Fie $A\in M_2(\mathbb{C})$. Arătaţi că dacă există $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ astfel încât $A^n=O_2$, atunci $A^2=O_2$.

PROBLEMA 3. Se consideră şirul de numere reale $(a_n)_{n\geq1}$, care, pentru orice $n\geq1$, verifică proprietăţile:

$$a_n\geq 2; \tag{i}$$

$$a_{n+1}\leq a_n^2-4a_n+6; \tag{ii}$$

$$a_{n+1}+a_n^2\leq 4a_n-\frac{3}{2}. \tag{iii}$$

Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq1}$ este convergent şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

PROBLEMA 4. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, cu proprietăţile:

$$f(x)+y=f\left(x+f(y)\right),\ \forall x,y\in\mathbb{R}; \tag{i}$$

$$\lim_{x\to0}f(x)=0. \tag{ii}$$

a) Arătaţi că f este injectivă;

b) Determinaţi toate funcţiile f cu proprietăţile (i) şi (ii).

[1] Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2] Toate problemele sunt obligatorii;
[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 25. 02. 2017

Clasa a XII – a

PROBLEMA 1. Să se calculeze integrala $I = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x+1} \right) \cdot \cos(\ln(x+1)) dx.$

(G.M. 9/2016)

PROBLEMA 2. Să se demonstreze că în orice grup finit, numărul elementelor de ordin impar este impar.

(G.M. 10/2016)

PROBLEMA 3. Fie $(K, \cdot)$ un grup cu patru elemente, unde $K = \{e, a, b, c\}$, e este elementul unitate şi $x^2 = e$, pentru fiecare $x \in K$.

$a)$ Alcătuiţi tabla operaţiei grupului $(K, \cdot)$;

$b)$ Arătaţi că grupul $(K, \cdot)$ nu este izomorf cu grupul $(\mathbb{Z}_4, +)$;

$c)$ Arătaţi că dacă G este un grup finit cu patru elemente, atunci G este izomorf sau cu K, sau cu $\mathbb{Z}_4$.

PROBLEMA 4. Să se arate că dacă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admite primitive, atunci şi funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = |x| \cdot f(x)$ admite primitive.

[1] Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2] Toate problemele sunt obligatorii;
[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.