OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 15.02.2014

Clasa a IX-a

Problema 1

a. Să se demonstreze că pentru orice numere reale a, b, c, x, y, z are loc inegalitatea următoare:

$$(ax+by+cz)^2 \leq (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2).$$

b. Să se determine numerele reale x, y, z care verifică egalitatea:

$$3\sqrt{2y+z-2}+2\sqrt{10-y-z}-\sqrt{x-y-z+2}+\sqrt{4-x+z}=14+\sqrt{z+y-x-2}.$$

Problema 2

Pentru fiecare număr natural n definim mulţimile:

$$A_n=\{x\in R|x^2+[x]\leq n\},\quad B_n=\{x\in R|[x^2]+x\leq n\}.$$

Să se demonstreze că $A_n\subset B_{n+1}$ şi $B_n\subset A_{n+1}$ oricare ar fi n.

Problema 3

Se consideră triunghiul ABC şi punctele D, E pentru care $13\overrightarrow{AB}+7\overrightarrow{BD}+3\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ respectiv $\overrightarrow{AE}+3\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{CB}$.

a) Să se construiască, în planul triunghiului, punctele D şi E.

b) Să se demonstreze că punctele A, D, E sunt coliniare.

Problema 4

Se dau numerele $1, 2, 3, \dots, 1000$. Să se afle cel mai mare număr m cu proprietatea că ştergând oricare m numere din cele 1000 de numere, printre cele $1000-m$ numere rămase există două astfel încât unul să îl dividă pe celălalt.

Probleme selectate de Prof. Cicortas Marius

Notă: a) Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
b) Toate problemele sunt obligatorii.
c) Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.