OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ
11.02.2012

CLASA a XII-a

Problema 1. Consideram funcţia $f : (0, \frac{\Pi}{2}) \to R$, $f(x)=\ln(tgx)$. Daca $F: (0,\frac{\Pi}{2})\to R$ este o primitivă a lui f, să se arate că exista $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x) \in R$.

Problema 2. Fie $f:[0,1]\to R^*$ o funcţie care admite primitive. Să se arate că nu există o primitivă F a lui f pentru care $F(x)=f(x)\cdot f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$, $(\forall)\ x \in [0,1]$.

Problema 3. Fie $(G, \cdot)$ grup şi $f: G\to G$, $f(x)=x^2$ endomorfism. Să se arate că $G_r=\{ x \in G|(\exists)\ n\in N \text{ a.î } x^{r^n} =e \}$, $r\in N$ este subgrup a lui G.

Problema 4. Fie $G=(-1;1)$ şi pe G definim legea de compziţie

$x*y=\frac{x+y}{a+xy}$, $a\in R$

a) Să se determine $a\in R$, astfel încât $(G,*)$ este un grup abelian.

b) Pentru a=1 arătaţi că funcţia $f:(-1;1)\to (0,\infty)$, $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ este izomorfism de grupuri , de la grupul $(G,*)$ la grupul $(R_+^*,\cdot)$.

c) Pentru a=1, calculaţi $\frac{1}{7}*\frac{1}{17}*\ldots*\frac{1}{2n^2-1}$, $n\in N$, $n\geq 2$.

Notă :
- toate subiectele sunt obligatorii
- timp de lucru 3 h
- fiecare problemă se notează cu puncte întregi de la 0 la 7