



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ  
11.02.2012

CLASA a XI-a

1. Fie  $n \in \mathbb{N}^*$  și  $M$  mulțimea matricelor pătrate de ordinul  $n$ , inversabile în  $M_n(\mathbb{R})$ , având elementele în mulțimea  $\{1, 2, 3, \dots, 2006\}$ . Să se arate că mulțimea  $M$  are un număr par de elemente.

2. Se consideră șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , cu  $x_0 \in \mathbb{R}$  și  $x_{n+1} = x_n + e^{-x_n}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Determinați  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\ln n}$ .

3. Fie  $a > 1$  un număr real fixat. Pentru fiecare număr natural nenul  $n$ , notăm cu  $k(n)$  cel mai mic număr natural  $k$  pentru care  $(n+1)^k \geq a \cdot n^k$ . Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n)}{n}$ .

4. Fiind dată funcția  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , să se arate că, dacă există  $c \in (a, b)$  astfel încât  $f$  are limite laterale infinite în  $c$ , atunci funcția  $f$  nu este monotonă pe  $[a, b]$ .

**Notă :**

- toate subiectele sunt obligatorii
- timp de lucru 3 h
- fiecare problemă se notează cu puncte întregi de la 0 la 7