MINISTERUL EDUCAȚIEI

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2024

CLASA a IX-a – Soluții

Problema 1. Fie patrulaterul convex $ABCD$, ale cărui diagonale se intersectează în punctul O. Dacă $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{OC}$, arătați că $ABCD$ este un paralelogram.

Gazeta Matematică

Soluția 1. Aplicând regula triunghiului deducem $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}$, adică $2\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})=3\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})$. **2p**

Cum vectorii $\overrightarrow{OB}$ și $\overrightarrow{OD}$, respectiv $\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OC}$, sunt coliniari, există $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\alpha\cdot\overrightarrow{OB}$ și $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\beta\cdot\overrightarrow{OA}$. Atunci $2\alpha\cdot\overrightarrow{OB}=3\beta\cdot\overrightarrow{OA}$ și, cum vectorii $\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OB}$ sunt necoliniari, rezultă că $\alpha=\beta=0$ **3p**

Conchidem că $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$ și $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{0}$, deci O este mijlocul fiecăreia dintre diagonale, așadar $ABCD$ este un paralelogram. **2p**

Soluția 2. Dacă M și N sunt mijloacele diagonalelor BD, respectiv AC, relația din enunț se scrie sub forma $2\cdot\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AO}=2\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{OC}$. **2p**

Deducem că $2\cdot(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CM})=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}$, sau $4\cdot\overrightarrow{NM}=2\cdot\overrightarrow{ON}$ **3p**

Rezultă că punctele M, N și O sunt coliniare, ceea ce se întâmplă doar dacă $M=N=O$. Astfel, punctul O este mijlocul fiecăreia dintre diagonale, prin urmare $ABCD$ este un paralelogram. **2p**

Problema 2. Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1=\dfrac{1}{2}$ și $2n\cdot a_{n+1}=(n+1)a_n$, oricare ar fi numărul natural nenul n.

a) Stabiliți formula termenului general a_n al șirului, unde n este un număr natural nenul.

b) Dacă $b_n=a_1+a_2+...+a_n$, arătați că numerele $\{b_n\},\{b_{n+1}\}$ și $\{b_{n+2}\}$ nu pot fi termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice pentru niciun număr natural nenul n.

(Am notat cu $\{x\}$ partea fracționară a numărului real x.)

Soluție. a) Avem $\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a_n}{n}$, oricare ar fi numărul natural nenul n. Înseamnă că șirul $\left(\dfrac{a_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică de rație $\dfrac{1}{2}$, prin urmare $\dfrac{a_n}{n}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot a_1=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, oricare ar fi numărul natural nenul n. Deducem că $a_n=\dfrac{n}{2^n}$, oricare ar fi numărul natural nenul n.

Altfel: se determină primii termeni ai șirului, se formulează ipoteza că $a_n=\dfrac{n}{2^n}$, oricare ar fi numărul natural nenul n și se demonstrază acest fapt prin inducție completă. **3p**

b) Avem:

$$b_n=2b_n-b_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}=2-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n},$$

oricare ar fi numărul natural nenul n.

Observăm că $\{b_1\} = \frac{1}{2}$, iar $\{b_2\} = 0$.

Pentru $n = 3$, $2^3 > 3 + 2$; dacă presupunem că $2^k > k + 2$ pentru un anumit $k \geq 3$, atunci $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2 \cdot (k + 2) = 2k + 4 > (k + 1) + 2$. În concluzie, $2^n > n + 2$ pentru orice număr natural $n \geq 3$. Rezultă că $\{b_n\} = 1 - \frac{n+2}{2^n}$, $\forall n \geq 3$. **2p**

Presupunem, prin absurd, că $\{b_n\}, \{b_{n+1}\}$ și $\{b_{n+2}\}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice pentru un număr natural $n \geq 3$. Observând că $\{b_n\} \leq \{b_{n+1}\} \leq \{b_{n+2}\}$ (deci ordinea celor trei numere în progresie este bine determinată), obținem că

$$\frac{n+2}{2^n} + \frac{n+4}{2^{n+2}} = \frac{n+3}{2^n} \Leftrightarrow 5n + 12 = 4n + 12,$$

fals. Pentru $n = 1$ și $n = 2$, numerele $\frac{1}{2}$, 0, $\frac{3}{8}$, respectiv 0, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, nu sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice. **2p**

Notă. Dacă sunt omise cazurile $n = 1$ și $n = 2$, se va scădea **1p**.

Problema 3. Se consideră numărul natural compus n și $1 = d_1 < d_2 < d_3 < ... < d_k = n$ divizorii naturali ai lui n, unde $k \geq 3$. Dacă toate ecuațiile $d_{i+2}x^2 - 2d_{i+1}x + d_i = 0$, unde $i \in \{1, 2, ..., k - 2\}$, au soluții reale, arătați că există un număr prim p astfel încât $n = p^{k-1}$.

Soluție. Avem că

$$4d_{i+1}^2 - 4d_{i+2} \cdot d_i \geq 0 \Leftrightarrow \frac{d_{i+1}}{d_i} \geq \frac{d_{i+2}}{d_{i+1}} \quad (*)\,,$$

oricare ar fi $i \in \{1, 2, ..., k - 2\}$. **1p**

Cum d_2 este cel mai mic divizor propriu al lui n, înseamnă că numărul $\frac{n}{d_2}$ este cel mai mare divizor propriu al lui n, așadar $\frac{n}{d_2} = d_{k-1}$.

Avem:

$$\frac{n}{d_2} = d_{k-1} = \prod_{i=1}^{k-2} \frac{d_{i+1}}{d_i} \geq \prod_{i=1}^{k-2} \frac{d_{i+2}}{d_{i+1}} = \frac{n}{d_2}.$$

Rezultă că toate inegalitățile $(*)$ se transformă în egalități. **3p**

Deducem că $d_{i+1}^2 = d_{i+2} \cdot d_i$, oricare ar fi $i \in \{1, 2, ..., k - 2\}$. Atunci numerele $1 = d_1$, d_2, d_3, ..., $d_k = n$ (în această ordine) sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice de rație d_2, așadar $n = d_2^{k-1}$. **2p**

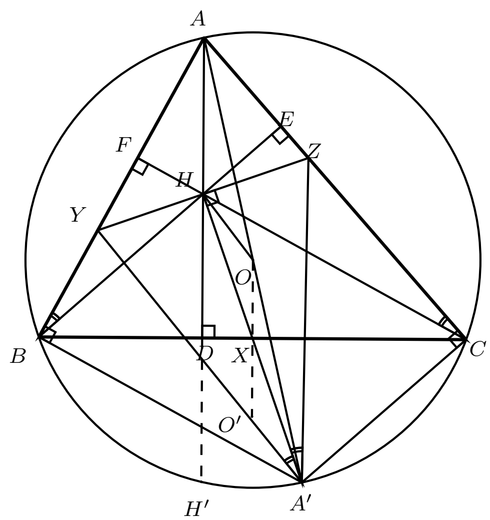
Cel mai mic divizor propriu al numărului compus n este un număr prim: $d_2 = p$, cu p număr prim, iar $n = p^{k-1}$. **1p**

Problema 4. Fie H ortocentrul triunghiului ascuțitunghic ABC și X mijlocul laturii BC. Perpendiculara în H pe HX taie laturile (AB) și (AC) în punctele Y, respectiv Z. Notăm cu O centrul cercului circumscris triunghiului ABC și cu O' centrul cercului circumscris triunghiului BHC.

a) Arătați că $HY = HZ$.

b) Demonstrați că $\overrightarrow{AY} + \overrightarrow{AZ} = 2\overrightarrow{OO'}$.

Soluție.



a) Fie A' punctul diametral opus lui A pe cercul circumscris triunghiului. Se știe că H și A' sunt simetrice față de X, deci H, X și A' sunt coliniare. Atunci $\sphericalangle ABA' = \sphericalangle ACA' = 90°$.

Astfel, patrulaterele $A'BYH$ și $A'CZH$ sunt inscriptibile, deci $\sphericalangle YBH = \sphericalangle YA'H$ și $\sphericalangle ZCH = \sphericalangle ZA'H$. **2p**

Pe de altă parte, din triunghiurile dreptunghice BEA și CFA avem $\sphericalangle ABE = \sphericalangle ACF = 90° - \sphericalangle BAC$. (E și F sunt picioarele înălțimilor triunghiului ABC duse din B respectiv C) **1p**

În consecință $\sphericalangle YA'H = \sphericalangle ZA'H$, de unde rezultă că $A'H$ este în același timp înălțime și bisectoare în triunghiul $YA'Z$, deci este și mediană, adică $HY = HZ$. **1p**

b) Din punctul a) rezultă că $\overrightarrow{AZ} + \overrightarrow{AY} = 2\overrightarrow{AH}$. **1p**

Se știe că simetricul H' al ortocentrului H față de latura BC se află pe cercul circumscris triunghiului ABC, deci simetricul cercului circumscris triunghiului BHC față de BC este cercul cicumscris triunghiului $BH'C$, adică cercul circumscris triunghiului ABC.

Astfel, centrul cercului circumscris triunghiului BHC este simetricul lui O față de BC. **1p**

Deducem că $\overrightarrow{OO'} = 2\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{AH}$, deoarece OX este linie mijlocie în triunghiul $HA'A$. De aici rezultă $\overrightarrow{AZ} + \overrightarrow{AY} = 2\overrightarrow{OO'}$. **1p**