Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2024

CLASA a VIII-a – soluții

Problema 1. Se consideră numerele reale nenule a și b, astfel încât

$$3\left(a^6+b^6\right)=a^2b^2\left(a^2b^2+9\right).$$

Demonstrați că cel puțin unul dintre numerele a și b este irațional.

Soluție. Egalitatea se poate scrie $a^4b^4-3a^6-3b^6+9a^2b^2=0$, $a^4(b^4-3a^2)-3b^2(b^4-3a^2)=0$, $(a^4-3b^2)(b^4-3a^2)=0$ **2p**

Deducem $a^4=3b^2$ sau $b^4=3a^2$ și, cum $a\neq 0$, $b\neq 0$, reiese $\sqrt{3}=\pm\dfrac{a^2}{b}$ sau $\sqrt{3}=\pm\dfrac{b^2}{a}$ ... **3p**

Dacă presupunem că $a\in\mathbb{Q}$ și $b\in\mathbb{Q}$, rezultă $\sqrt{3}\in\mathbb{Q}$ – fals. Ca atare presupunerea este falsă, deci cel puțin unul dintre numerele a și b este irațional **2p**

Soluția 2. Avem $3(a^6-2a^3b^3+b^6)=a^2b^2(a^2b^2-6ab+9)$, $3(a^3-b^3)^2=a^2b^2(ab-3)^2$ .. **2p**

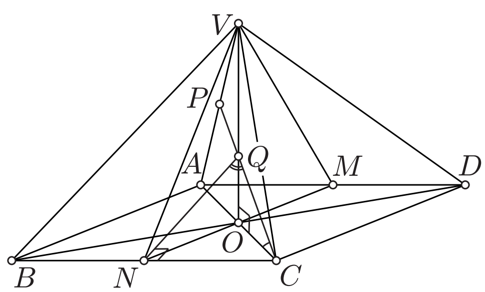
Deducem $\sqrt{3}(a^3-b^3)=\pm ab(ab-3)$ **2p**

Dacă $a=b\neq 0$, ipoteza duce la $a^4(a^2-3)^2=0$, de unde $a=\pm\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$ **1p**

Dacă $a\neq b$ și $a,b\in\mathbb{Q}$ reiese $\sqrt{3}=\pm\dfrac{ab(ab-3)}{a^3-b^3}\in\mathbb{Q}$ – fals, deci $a\notin\mathbb{Q}$ sau $b\notin\mathbb{Q}$ **2p**

Problema 2. Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$, cu baza $ABCD$ și punctele M, N și P, mijloacele muchiilor AD, BC, respectiv VA. Demonstrați că unghiul dreptei CP cu planul (BAD) are măsura de 45° dacă și numai dacă unghiul dreptei CP cu planul (VMN) are măsura de 30°.

Gazeta Matematică



Soluție. Fie O centrul pătratului $ABCD$; VO este înălțimea piramidei. Segmentele CP și VO sunt mediane în triunghiul VAC, deci se intersectează într-un punct Q. **1p**

Proiecția dreptei CP pe planul (BAD) este dreapta OC, așadar unghiul dreptei CP cu planul (BAD) este $\sphericalangle OCQ$ **2p**

$CN\perp MN$, $CN\perp VO$ și $MN\cap VO=\{O\}$, deci $CN\perp(VMN)$. Deducem că proiecția dreptei CP pe planul (VMN) este dreapta NQ, deci unghiul dreptei CP cu planul (VMN) este $\sphericalangle CQN$ .. **2p**

Dacă $\sphericalangle OCQ=45^\circ$, atunci $CQ=\sqrt{2}\cdot OC$ și, cum $CN=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot OC$, în triunghiul dreptunghic CQN cateta CN este jumătate din ipotenuza CQ, așadar $\sphericalangle CQN=30^\circ$ **1p**

Reciproc, dacă $\sphericalangle CQN=30^\circ$, atunci $CQ=2CN=\sqrt{2}\cdot OC$, deci $\sphericalangle OCQ=45^\circ$ **1p**

Problema 3. Determinați numerele reale x și y care verifică simultan condițiile:
(i) $x\geqslant 2y^2$
(ii) $y\geqslant 2x^2$
(iii) numărul $8(x-y)$ este întreg.

Soluție. Din (i) și (ii) obținem că $x\geqslant 0$ și $y\geqslant 0$. Mai mult, $x=0$ dacă și numai dacă $y=0$. Obținem soluția $(0,0)$, iar celelalte soluții (x,y) au $x>0$ și $y>0$. **1p**

Fie (x, y) o soluție cu $x > 0$ și $y > 0$.

Din (i) și (ii) rezultă $x \geqslant 2y^2 \geqslant 8x^4$, deci $x\left(8x^3 - 1\right) \leqslant 0$ și, cum $x > 0$, obținem $8x^3 \leqslant 1$, așadar $0 < x \leqslant \dfrac{1}{2}$. Analog deducem că și $0 < y \leqslant \dfrac{1}{2}$. **1p**

Este suficient să analizăm cazul $x \geqslant y$. Avem $0 \leqslant 8(x-y) < 8x \leqslant 4$ și, din (iii), deducem că $8(x-y) \in \{0, 1, 2, 3\}$, așadar $x - y \in \left\{0, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{8}\right\}$ și avem situațiile: **1p**

• Dacă $x - y = 0$, adică $x = y$, toate condițiile din enunț sunt îndeplinite. Așadar perechile (a, a), cu $a \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right]$, sunt soluții. **1p**

• Dacă $x - y = \dfrac{1}{8}$, adică $y = x - \dfrac{1}{8}$, obținem: $y \geqslant 2x^2 \Leftrightarrow x - \dfrac{1}{8} \geqslant 2x^2 \Leftrightarrow (4x-1)^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{4}$. Rezultă că $y = \dfrac{1}{8}$, iar perechea $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}\right)$ verifică și condiția (i), deci este soluție. **1p**

• Dacă $x - y = \dfrac{1}{4}$, adică $y = x - \dfrac{1}{4}$, obținem: $y \geqslant 2x^2 \Leftrightarrow x - \dfrac{1}{4} \geqslant 2x^2 \Leftrightarrow 8x^2 - 4x + 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow 4x^2 + (2x-1)^2 \leqslant 0$, imposibil.

• Dacă $x - y = \dfrac{3}{8}$, adică $y = x - \dfrac{3}{8}$, obținem: $y \geqslant 2x^2 \Leftrightarrow x - \dfrac{3}{8} \geqslant 2x^2 \Leftrightarrow 16x^2 - 8x + 3 \leqslant 0 \Leftrightarrow (4x-1)^2 + 2 \leqslant 0$, imposibil. Așadar, nu avem soluții în aceste ultime două cazuri. ... **1p**

Reiese că soluțiile problemei sunt perechile $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}\right)$, $\left(\dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{4}\right)$ și (a, a), cu $a \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$. ... **1p**

Problema 4. Dacă m este un număr natural nenul, notăm cu $S(m)$ suma divizorilor naturali ai lui m, iar dacă n și p sunt numerele naturale nenule, notăm cu $C(n, p)$ suma câturilor împărțirilor lui n la divizorii naturali ai lui p (de exemplu, $C(18, 10) = 18 + 9 + 3 + 1 = 31$).

Fie a și b două numere naturale nenule.

a) Demonstrați că, dacă $S(a) = C(a, b)$ și $S(b) = C(b, a)$, atunci $a = b$.

b) Este totdeauna adevărat că, dacă $S(a) + S(b) = C(a, b) + C(b, a)$, atunci $a = b$?

Soluție. a) Dacă $d_1, d_2, \ldots d_p$ sunt divizorii naturali ai unui număr natural nenul n, atunci $\{d_1, d_2, \ldots, d_p\} = \left\{\dfrac{n}{d_1}, \dfrac{n}{d_2}, \ldots, \dfrac{n}{d_p}\right\}$ **1p**

Fie $b_1, b_2, \ldots, b_q$ divizorii naturali ai lui b. Obținem

$$C(a, b) \leqslant \frac{a}{b_1} + \ldots + \frac{a}{b_q} = \frac{a}{b}\left(\frac{b}{b_1} + \ldots + \frac{b}{b_q}\right) = \frac{a}{b}S(b) = \frac{a}{b}C(b, a), \qquad (1)$$

așadar $\dfrac{C(a, b)}{a} \leqslant \dfrac{C(b, a)}{b}$. **2p**

Deoarece ipoteza este simetrică în a și b, avem și $\dfrac{C(b, a)}{b} \leqslant \dfrac{C(a, b)}{a}$, deci $\dfrac{C(b, a)}{b} = \dfrac{C(a, b)}{a}$, ceea ce arată că avem egalitate în (1). **1p**

Deducem că a este divizibil cu toți divizorii lui b și b este divizibil cu toți divizorii lui a, așadar $a = b$ **1p**

b) Nu este adevărat. De exemplu, pentru $a = 2$ și $b = 5$, avem $S(2) + S(5) = (1+2) + (1+5) = 9$ și $C(2, 5) + C(5, 2) = 2 + (5 + 2) = 9$, dar $a \neq b$ **2p**