CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

etapa locală – 17 februarie 2018

CLASA a X-a

Filiera teoretică – Profilul uman – specializarea Filologie, Ştiinţe Sociale

1. $a=\sqrt{31+8\sqrt{15}}$, $b=\sqrt{31-8\sqrt{15}}$, $c=\sqrt[3]{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ și $d=\log_2\left(\frac{a+b}{ab}\right)$.

a) **(3p)** Arătați că $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=8$

b) **(2p)** Calculați numerele c și d

c) **(2p)** Ordonați crescător numerele a,b,c și d.

a) $a=4+\sqrt{15}$ și $b=4-\sqrt{15}$..**2p**

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=8$ **1p**

b) $c=\sqrt[3]{8}=2$ **1p**

$d=\log_2 8=3$ **1p**

c) $a=4+\sqrt{15}>7$ și $b=4-\sqrt{15}<1$ **1p**

$b<c<d<a$ **1p**

2. a) **(4p)** Calculați: $[0,(3)]^3\cdot\left(\frac{1}{27}\right)^{0,5}:9^{-\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{17}{6}}$

b) **(3p)** Logaritmați expresia: $E=\frac{3ab^2}{4\sqrt[3]{a^4b}}$, unde $a,b>0$.

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot(3^{-3})^{\frac{1}{2}}:(3^2)^{-\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{17}{6}}=$ **2p**

$=3^{-1}=\frac{1}{3}$ **2p**

b) (Logaritmarea expresiei se poate face în orice bază)

$\lg E=\lg(3ab^2)-\lg\left(4\sqrt[3]{a^4b}\right)$ **1p**

$\lg E=\lg 3-\lg 4-\frac{1}{3}\lg a+\frac{5}{3}\lg b$ **2p**

3. Fie numerele $x = \log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \ldots \cdot \log_{29} 30$ și

$$y = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2} + \log_{\frac{1}{3}} \frac{2}{3} + \log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{4} + \cdots + \log_{\frac{1}{3}} \frac{242}{243}$$

a) **(3p)** Determinați numerele întregi consecutive m și n pentru care $m < x < n$

b) **(4p)** Comparați numerele x și y.

a) $x = \log_2 30$ **2p**

$4 < x < 5 \Longrightarrow m = 4$ și $n = 5$ **1p**

b) $y = \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{242}{243}\right) = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{243} = 5$ **2p**

Din a) $\Rightarrow$ $x < y$ **2p**

4. **(7p)** Fie mulțimile $A = \left\{x \in \mathbf{N} \,/\, \sqrt{\frac{225}{2x+1}} \in \mathbf{N}\right\}$ și $B = \left\{x \in \mathbf{Z} \,/\, \sqrt[3]{x - 12} \in \mathbf{Z}\right\}$.

Determinați $A \cap B$.

$\sqrt{\frac{225}{2x+1}} \in \mathbf{N} \Leftrightarrow 2x + 1 \in \{1; 9; 25; 225\}$ **2p**

$x \in \{0; 4; 12; 112\} \Rightarrow A = \{0; 4; 12; 112\}$ **2p**

Valorile lui $x \in \boldsymbol{A}$ pentru care $\sqrt[3]{x - 12} \in \mathbf{Z}$ sunt

$x = 4$ și $x = 12 \Rightarrow A \cap B = \{4; 12\}$ **3p**