Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 16 martie 2019

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE-CLASA a VIII-a

Problema 1. Determinaţi numerele x, y, cu x întreg şi y raţional, pentru care se verifică egalitatea:

$$5(x^2 + xy + y^2) = 7(x + 2y).$$

Gazeta Matematică

Soluţie. Aducerea ecuaţiei la forma $(10y + 5x - 14)^2 + 75x^2 - 196 = 0$ **3p**
$x^2 \leq \frac{196}{75} < 3$, x întreg, rezultă $x \in \{-1, 0, 1\}$ **1p**
Pentru $x = 1$ obţinem $y \in \{2, -\frac{1}{5}\}$, pentru $x = 0$ obţinem $y \in \{0, \frac{14}{5}\}$ şi pentru $x = -1$ obţinem $y \in \{3, \frac{4}{5}\}$
Soluţiile sunt: $\{(-1, 3); (-1, \frac{4}{5}); (0, 0); (0, \frac{14}{5}); (1, 2); (1, -\frac{1}{5})\}$ **3p**

Problema 2. Fie $ABCDA'B'C'D'$ paralelipiped dreptunghic şi M, N, P proiecţiile punctelor A, C respectiv B' pe diagonala BD'.
a) Arătaţi că $BM + BN + BP = BD'$.
b) Demonstraţi că $3(AM^2 + B'P^2 + CN^2) \geq 2D'B^2$ dacă şi numai dacă paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ este cub.

Soluţie. a) Aplicând teorema catetei în triunghiurile $ABD', D'B'B$ şi $D'CB$, obţinem $BM = \frac{AB^2}{BD'}, BP = \frac{B'B^2}{BD'}$ şi $BN = \frac{BC^2}{BD'}$.
Concluzia **2p**
b) Pentru implicaţia directă notăm $AB = x, BC = y, AA' = z$. Aplicând teorema înălţimii, prin ridicare la pătrat, deducem relaţiile: $AM^2 = \frac{AB^2 \cdot D'A^2}{D'B^2} = \frac{x^2y^2 + x^2z^2}{x^2 + y^2 + z^2}, B'P^2 = \frac{D'B'^2 \cdot B'B^2}{D'B^2} = \frac{z^2x^2 + z^2y^2}{x^2 + y^2 + z^2}, CN^2 = \frac{D'C^2 \cdot CB^2}{D'B^2} = \frac{y^2x^2 + y^2z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$ **2p**
Inegalitatea devine $6\frac{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2}{x^2 + y^2 + z^2} \geq 2(x^2 + y^2 + z^2)$, adică $(x^2 - y^2)^2 + (y^2 - z^2)^2 + (z^2 - x^2)^2 \leq 0$
Se deduce $x = y = z$ **2p**
Pentru implicaţia inversă notând cu l lungimea muchiei cubului, obţinem $AM = B'P = CN = \frac{l\sqrt{6}}{3}$ şi inegalitatea se verifică cu egalitate : $6l^2 \geq 6l^2$ **1p**

Problema 3. Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ astfel încât măsura unghiului diedru format de planele $(A'BD)$ şi $(C'BD)$ este $90°$ iar măsura unghiului diedru format de planele $(AB'C)$ şi $(D'B'C)$ este $60°$. Determinaţi măsura unghiului diedru format de planele $(BC'D)$ şi $(A'C'D)$.

Soluţie. Vom considera lungimea lui BC egală cu unitatea de masură, iar $AB = a, AA' = c$. Dacă P este proiecţia lui A pe BD deducem $m(\widehat{(A'BD), (ABC)}) = m(\widehat{A'PA})$ şi dacă P' este proiecţia lui C pe BD, obţinem $m(\widehat{(C'BD), (ABC)}) = m(\widehat{C'P'C})$. Din congruenţa triunghiurilor dreptunghice $A'AP$ şi $C'CP'$, $(C.C.)$, rezultă $m(\widehat{A'PA}) = \frac{1}{2}(180^\circ - 90^\circ) = 45^\circ$ de unde $c = AA' = AP = \frac{AB \cdot AD}{BD} = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$ **2p**

Analog ipoteza $m(\widehat{(AB'C),(D'B'C)}) = 60^\circ$ conduce la relaţia $\frac{c\sqrt{3}}{\sqrt{c^2+1}} = a$. **2p**

Se obţine $a = 1, c = \frac{1}{\sqrt{2}}$ **2p**

Rezultă că $ABCD$ este pătrat, şi, din motive de simetrie,
$m(\widehat{(BC'D),(A'C'D})= m(\widehat{(AB'C),(D'B'C)}) = 60^\circ$ **1p**

Problema 4. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia:

$$\left[x + \frac{1}{x}\right] = \left[x^2 + \frac{1}{x^2}\right],$$

unde $[a]$, reprezintă partea întreagă a numărului real a.

Soluţie. Din ipoteză se deduce $x > 0$ **1p**

Notând $x + \frac{1}{x} = a \geq 2$, ecuaţia devine $[a] = [a^2 - 2] = [a^2] - 2$ $(*)$ **1p**

• Dacă $a \in [2, \sqrt{5}) \Leftrightarrow a^2 \in [4, 5) \Rightarrow [a] = 2, [a^2] = 4$ şi ecuaţia $(*)$ se verifică....... **1p**

• Dacă $a \in [\sqrt{5}, 3) \Leftrightarrow a^2 \in [5, 9) \Rightarrow [a] = 2, [a^2] \geq 5$ şi ecuaţia $(*)$ **nu** se verifică... **1p**

• Dacă $a \in [k, k+1), k \geq 3$, natural $\Leftrightarrow a^2 \in [k^2, (k+1)^2) \Rightarrow [a] = k, [a^2] \geq k^2$, deci $[a^2] - 2 \geq k^2 - 2 > k = [a]$ şi ecuaţia $(*)$ **nu** se verifică.............................. **1p**

Aşadar $x + \frac{1}{x} < \sqrt{5} \Leftrightarrow x^2 - \sqrt{5}x + 1 < 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} < 0$.

În concluzie $|x - \frac{\sqrt{5}}{2}| < \frac{1}{2}, x \in \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.................................. **2p**