Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 16 martie 2019

CLASA a XII-a — Soluţii şi barem orientativ

Problema 1. Fie n un număr natural nenul şi fie G un grup finit de ordin n. O funcţie $f\colon G \to G$ are proprietatea (P), dacă $f(xyz) = f(x)f(y)f(z)$, oricare ar fi x, y, z din G.

(a) Dacă n este impar, arătaţi că orice funcţie care are proprietatea (P) este un endomorfism al lui G;

(b) Dacă n este par, rămâne adevărată concluzia de la punctul **(a)**?

Soluţie. **(a)** Fie e elementul neutru al lui G. Pentru $x = y = z = e$, rezultă $f(e)^3 = f(e)$, deci $f(e)^2 = e$. Cum n este impar, rezultă că $f(e) = e$. **2p**

Deci, dacă x şi y sunt două elemente oarecare ale lui G, atunci $f(xy) = f(xye) = f(x)f(y)f(e) = f(x)f(y)$, i.e., f este un endomorfism al lui G. **2p**

(b) Răspunsul este negativ. Fie a un element de ordin 2 al lui G şi fie $f\colon G \to G$, $f(x) = a$. Dacă x, y, z sunt elemente ale lui G, atunci $f(xyz) = a = a^3 = f(x)f(y)f(z)$, deci f are proprietatea (P). **2p**

Dar $f(e) = a \neq e$, deci f nu este un endomorfism al lui G. **1p**

Problema 2. Fie n un număr natural nenul şi fie $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă. Arătaţi că există un punct c în intervalul închis $[0, 1-1/n]$, astfel încât

$$\int_c^{c+\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{sau} \quad \int_0^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{c+\frac{1}{n}}^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Soluţie. Fie $F\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$; această funcţie este continuă. Concluzia problemei este echivalentă cu existenţa unui punct c în intervalul închis $[0, 1-1/n]$, astfel încât $\big(F(c+1/n) - F(c)\big)\big(F(1) - F(c+1/n) - F(c)\big) = 0$, i.e., $F(c)\big(F(1) - F(c)\big) = F(c+1/n)\big(F(1) - F(c+1/n)\big)$. **2p**

Pentru a demonstra acest lucru, considerăm funcţia continuă $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = F(x)\big(F(1) - F(x)\big)$. Evident, $g(0) = 0 = g(1)$. **2p**

Să presupunem că $g(x) \neq g(x+1/n)$, oricare ar fi x în intervalul închis $[0, 1-1/n]$. Din continuitate, rezultă că $g(x) < g(x+1/n)$, oricare ar fi x în intervalul închis $[0, 1-1/n]$, sau $g(x) > g(x+1/n)$, oricare ar fi x în intervalul închis $[0, 1-1/n]$. Prin urmare, $0 = g(1) - g(0) = \sum_{k=0}^{n-1} \big(g(k/n + 1/n) - g(k/n)\big) \neq 0$ — contradicţie. **3p**

Remarcă. În argumentul de mai sus, funcţia g poate fi înlocuită cu $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $h(x) = F(x)^2 + \big(F(1) - F(x)\big)^2 = F(1)^2 - 2g(x)$.

Problema 3. Fie G un grup finit şi fie x_1, $\ldots$, x_n o enumerare a elementelor sale. Considerăm matricea $(a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$, unde $a_{ij} = 0$, dacă $x_i x_j^{-1} = x_j x_i^{-1}$, şi $a_{ij} = 1$, în caz contrar. Determinaţi paritatea numărului întreg $\det(a_{ij})$.

Soluţie. Determinantul $\det(a_{ij})$ este par. Pentru a demonstra acest lucru, vom arăta că $\det(a_{ij})$ este divizibil cu $|S|$, unde $S = \{x \,|\, x \in G, x \neq x^{-1}\}$. Întrucât un element din G aparţine lui S dacă şi numai dacă inversul său aparţine lui S, $|S|$ este par (posibil zero), deci şi $\det(a_{ij})$ este par. **2p**

Valoarea unui determinant nu se schimbă dacă o coloană este înlocuită cu suma tuturor coloanelor. Pentru a demonstra divizibilitatea, este deci suficient să arătăm că fiecare linie conţine exact $|S|$ unităţi.

Dacă S este vidă, atunci $(a_{ij}) = \mathbf{O}_n$, deci $\det(a_{ij}) = 0$. **1p**

Dacă S nu este vidă, fixăm o linie, de exemplu, linia i, şi considerăm mulţimea $J_i = \{j \,|\, a_{ij} = 1\}$. Întrucât $j \mapsto x_i x_j^{-1}$ defineşte o bijecţie de la J_i la S, rezultă că $|J_i| = |S|$. **4p**

Problema 4. Fie a un număr real, $a > 1$. Determinaţi numerele reale $b \geq 1$ astfel încât

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x (1+t^a)^{-b}\,\mathrm{d}t = 1.$$

Soluţie. Fie $b \geq 1$ şi funcţiile f_b, $F_b\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_b(x) = (1+x^a)^{-b}$ şi $F_b(x) = \int_0^x f_b(t)\,\mathrm{d}t$. Cum f_b este pozitivă, rezultă că F_b este crescătoare, deci există limita $I(b) = \lim_{x\to\infty} F_b(x)$. **1p**

Cum $0 \leq f_b(x) \leq f_1(x)$, oricare ar fi $x \geq 0$, rezultă că

$$\begin{aligned} 0 \leq F_b(x) \leq F_1(x) &= \int_0^1 (1+t^a)^{-1}\,\mathrm{d}t + \int_1^x (1+t^a)^{-1}\,\mathrm{d}t \leq 1 + \int_1^x t^{-a}\,\mathrm{d}t \\ &= 1 + 1/(a-1) - x^{1-a}/(a-1) \leq a/(a-1), \end{aligned}$$

oricare ar fi $x \geq 1$. Deci $I(b)$ este real. **1p**

Arătăm că aplicaţia $b \mapsto I(b)$ este strict descrescătoare, deci injectivă. Fie $1 \leq b < c$. Cum f_b şi f_c sunt funcţii continue şi $f_b(x) > f_c(x)$, oricare ar fi $x > 0$, rezultă că

$$\begin{aligned} I(b) &= \int_0^1 f_b(t)\,\mathrm{d}t + \lim_{x\to\infty}\int_1^x f_b(t)\,\mathrm{d}t > \int_0^1 f_c(t)\,\mathrm{d}t + \lim_{x\to\infty}\int_1^x f_b(t)\,\mathrm{d}t \\ &\geq \int_0^1 f_c(t)\,\mathrm{d}t + \lim_{x\to\infty}\int_1^x f_c(t)\,\mathrm{d}t = I(c). \end{aligned}$$

.... **2p**

Arătăm că $I(1+1/a) = 1$. Într-adevăr,

$$\begin{aligned} \int_0^x (1+t^a)^{-1/a}\,\mathrm{d}t &= \int_0^x t'(1+t^a)^{-1/a}\,\mathrm{d}t = t(1+t^a)^{-1/a}\Big|_0^x + \int_0^x t^a(1+t^a)^{-1-1/a}\,\mathrm{d}t \\ &= x(1+x^a)^{-1/a} + \int_0^x (1+t^a)^{-1/a}\,\mathrm{d}t - F_{1+1/a}(x). \end{aligned}$$

Rezultă că $F_{1+1/a}(x) = x(1+x^a)^{-1/a}$, deci $I(1+1/a) = 1$ şi, prin urmare, $b = 1+1/a$. **3p**