Societatea de Științe Matematice din România

Matematika tantárgyverseny
Megyei (Bukarestben szektori) forduló, 2019. március 16.

X. OSZTÁLY

1. feladat. Határozd meg azokat az $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ függvényeket, amelyekre

$$2^{-x-y}\leq\frac{f(x)f(y)}{(x^2+1)(y^2+1)}\leq\frac{f(x+y)}{(x+y)^2+1},$$

bármely $x,y\in\mathbb{R}$ esetén.

Gazeta Matematică

2. feladat. Adott az $n\in\mathbb{N}, n\geq 3$ szám.

a) Igazold, hogy léteznek olyan $z_1,z_2,\ldots,z_n$ komplex számok, amelyekre

$$\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_3}+\ldots+\frac{z_{n-1}}{z_n}+\frac{z_n}{z_1}=n\mathrm{i}.$$

b) Az n szám mely értékeire léteznek olyan azonos moduluszú $z_1,z_2,\ldots,z_n$ komplex számok, amelyekre

$$\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_3}+\cdots+\frac{z_{n-1}}{z_n}+\frac{z_n}{z_1}=n\mathrm{i}?$$

3. feladat. Az a,b,c különböző komplex számokra $|a|=|b|=|c|=1$. Igazold, hogy ha $|a+b-c|^2+|b+c-a|^2+|c+a-b|^2=12$, akkor az a,b,c affixumú pontok egy egyenlő oldalú háromszög csúcsai!

4. feladat. Határozd meg azt a legkisebb szigorúan pozitív λ valós számot, amelyre bármely $a_1,a_2,a_3\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ és $b_1,b_2,b_3\in(0,\infty)$ valós számokra, ha igaz a $\sum\limits_{i=1}^{3}a_i=\sum\limits_{i=1}^{3}b_i=1$ egyenlőség, akkor igaz a

$$b_1b_2b_3\leq\lambda(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)$$

egyenlőtlenség is.

Munkaidő 4 óra.
Minden feladatra 7 pont szerezhető.