Ministerul Educației Naționale
romania2019.eu
Președinția României la Consiliul Uniunii Europene
Societatea de Științe Matematice din România

Matematika tantárgyverseny
Megyei (Bukarestben szektori) forduló, 2019. március 16.

IX. OSZTÁLY

1. feladat. Legyen $n \geq 2$ egy természetes szám és $a_1, a_2, ..., a_n$, $b_1, b_2, ..., b_n$ olyan szigorúan pozitív számok, amelyekre $a_1 + a_2 + ... + a_n = b_1 + b_2 + ... + b_n = S$.

a) Bizonyítsd be, hogy $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{a_k + b_k} \geq \frac{S}{2}$.

b) Bizonyítsd be, hogy $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{a_k + b_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^2}{a_k + b_k}$.

Gazeta Matematică

2. feladat. Az ABC hegyesszögű háromszög magasságpontja H. Legyen X egy olyan pont az ABC háromszög síkjában, amelyre az XAH háromszög egyenlő szárú derékszögű, átfogója AH, a B és X pontok pedig az AH egyenes különböző oldalain vannak.

Bizonyítsd be, hogy akkor és csak akkor áll fenn az $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} + \overrightarrow{XH} = \overrightarrow{XB}$ egyenlőség, ha $\widehat{BAC} = 45°$.

3. feladat. Adott az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ valós számsorozat, amelyre

$$2(a_1 + a_2 + ... + a_n) = na_{n+1},$$

bármely $n \geq 1$ esetén.

a) Bizonyítsd be, hogy az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat egy számtani haladvány!

b) Ha $[a_1]+[a_2]+...+[a_n] = [a_1 + a_2 + ... + a_n]$ bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, bizonyítsd be, hogy a sorozat minden tagja egész szám! ($[x]$ az x valós szám egészrészét jelöli)

4. feladat. Határozd meg az összes olyan nemnulla p természetes számot, amelyre létezik $n \in \mathbb{N}^*$ szám úgy, hogy a $p^n + 3^n$ szám ossza a $p^{n+1} + 3^{n+1}$ számot!

Munkaidő 4 óra.
Minden feladatra 7 pont szerezhető.